Temps des pratiques de savoir, dispositifs et stratégies professorales : une étude de cas en mathématique au cours préparatoire : Journal du Nombre et Anticipation

Nathalie Vigot

THÈSE / UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

sous le sceau de l'Université européenne de Bretagne

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

mention : Sciences de l'Éducation

École Doctorale Sciences Humaines et Sociales

présentée par

Nathalie Vigot

Préparée au CREAD

Temps des pratiques de savoir, dispositifs et stratégies professorales. Une étude de cas en mathématique au cours préparatoire : Journal du Nombre et Anticipation

Thèse soutenue le 4 novembre 2014

devant le jury composé de :

jury 1 (rapporteur)

Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Professeur émérite à l'université d'Artois, rattachée au LDAR

jury 2 (rapporteur)

Alain Mercier, Professeur émérite, AMU & ENS-Lyon, ADEF

jury 3

Ghislaine Gueudet, Professeur, UBO, CREAD

jury 4

Serge Quilio, Maître de conférences, Laboratoire I3DL

jury 5

Gérard Sensevy, Professeur, UBO, CREAD **(directeur de thèse)**

A ma mère,
Marthe Francine Galle Vigot,
qui nous a tant aimé …
mon père André,
mes sœurs Claude, Michelle, Isabelle
mes frères Richard, Jean-Louis,
Patrick, Jean-Christophe
et moi.

Pour Jean-Louis,
Petit Prince rieur, magnifique, intelligent dont
la joie de vivre m'émerveille.

Remerciements

Je remercie le directeur de ma thèse Gérard Sensevy pour son aide et ses conseils toujours précieux.

Je remercie également les membres du jury Madame Perrin-Glorian, Madame Gueudet, Monsieur Mercier et Monsieur Quilio.

Je remercie le CREAD.

Je remercie Martine Kervran, Jacques Kerneis et les collègues du séminaire-action.

Je remercie les collègues de la recherche ACE.

Je remercie Roland Laubriat.

Je remercie le service de recherche de l'ESPÉ de Bretagne.

Je remercie les collègues de mon école.

Je remercie enfin mes élèves de cours préparatoire.

PLAN GÉNÉRAL

Table des matières

PARTIE 1 « LE JOURNAL DU NOMBRE »

CHAPITRE 1 : la genèse du Journal du Nombre

CHAPITRE 2 : le Journal du Nombre et la recherche ACE

CHAPITRE 3 : le travail sur les factures

CHAPITRE 4 : l'élève producteur de ses propres énoncés

SYNTHÈSE

PARTIE 2 : ANTICIPATION

CHAPITRE 1 : la cellule de germination et de diffusion

CHAPITRE 2 : le devancement du temps didactique

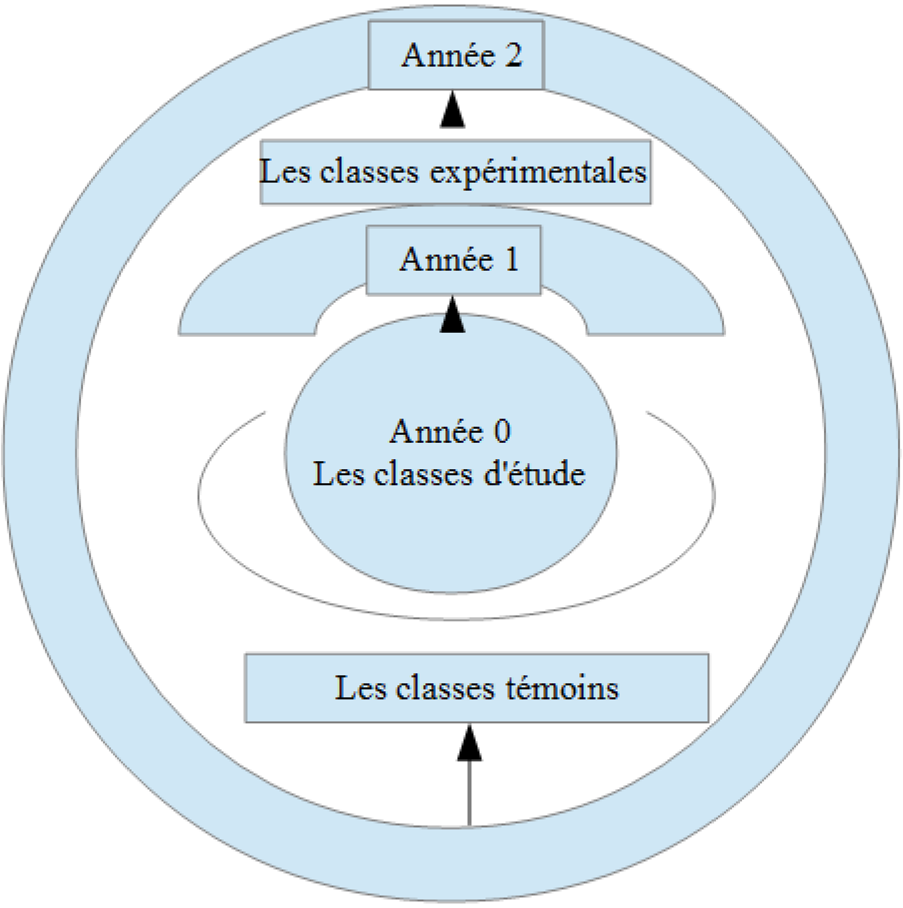
SYNTHÈSE GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

1. INTRODUCTION

Cette thèse étudie le sens mathématique et la pratique des algorithmes. Elle est incluse dans une recherche nationale, la recherche Arithmétique et Compréhension à l'école élémentaire (ACE) qui propose la mise en œuvre et l'analyse des effets d'une progression (curriculum) sur l'ensemble d'une année. Nous attirons l'attention du lecteur sur l'association et la complémentarité des mots Arithmétique et Compréhension. Cette progression, en effet, repose sur l'idée centrale de faire travailler par les élèves à la fois le sens mathématique et la pratique des algorithmes dans leur durée propre. Je reviendrai sur ce point. Ce principe fondamental construit la progression ACE. Celle-ci se présente sous la forme de différents modules répartis sur l'année scolaire pour le cours préparatoire. Elle vise essentiellement la construction du nombre par les situations de recherche. Les modules sont répartis entre quatre domaines évolutifs et itératifs. Ils visent à aborder et approfondir le calcul mental, la résolution de problèmes, les repères topologiques, avec la perception des quantités par un usage régulier du logiciel « Estimateur », et à mettre les élèves dans des situations de recherche sur le nombre.

Dans cette recherche, j'ai été à la fois le professeur et le chercheur de la classe filmée chaque jour, lors des séances de mathématiques. Cette posture de professeur-chercheur sera étudiée afin de comprendre ses effets sur les analyses proposées.
Une seconde spécificité concerne la mise en œuvre de cette expérimentation. Celle-ci s'établit sur trois niveaux de réalisation dans les classes. « La réalisation de niveau 0» est d'abord pratiquée dans quatre *classes d'étude*. Nous décrirons ultérieurement le rôle de la « classe d'étude ». L'expérimentation se déroule ensuite dans les classes des académies concernées. Cela implique une centaine de classes pour les quatre académies de Lille, Nancy, Versailles et Rennes en partenariat avec Marseille. Nous l'appellerons « la réalisation de niveau 1 ».
Pour analyser l'impact de la progression ACE et les hypothèses formulées sur la construction du nombre par les élèves, mentionnons l'existence de classes témoins associées au dispositif dès l'année 1 de l'implémentation, évaluées en comparaison avec les classes expérimentales dans un système pré-test/post-test. Quant à « la réalisation de niveau 2 », elle concerne toutes les classes citées précédemment pour une troisième année de recherche nationale. L'implémentation s'est développée par l'ajout de classes étrangères au dispositif d'origine dans lesquelles la progression
ACE a été appliquée à la rentrée scolaire 2013/2014. Elle est censée continuée ce développement, d'une manière voisine, dans le futur.
Nous présentons un rapide schéma des différents niveaux de réalisation dans les classes durant les trois années de la recherche ACE.

L' implémentation de la progression ACE



Le cercle au centre correspond à « la réalisation de niveau 0» avec les quatre classes d'étude. Puis, « la réalisation de niveau 1 » est symbolisée par deux groupes : les classes expérimentales (ACE) et les classes témoins. Ensuite, toutes les classes mettent en œuvre la progression ACE représentée par le cercle de l'année 2.

Retraçons maintenant l'implémentation de la progression ACE dans les classes par le bref historique ci-dessous. Nous pensons que cette courte genèse permettra de mieux appréhender la structure de l'expérimentation et d'identifier sommairement le rôle et la place des classes d'étude.

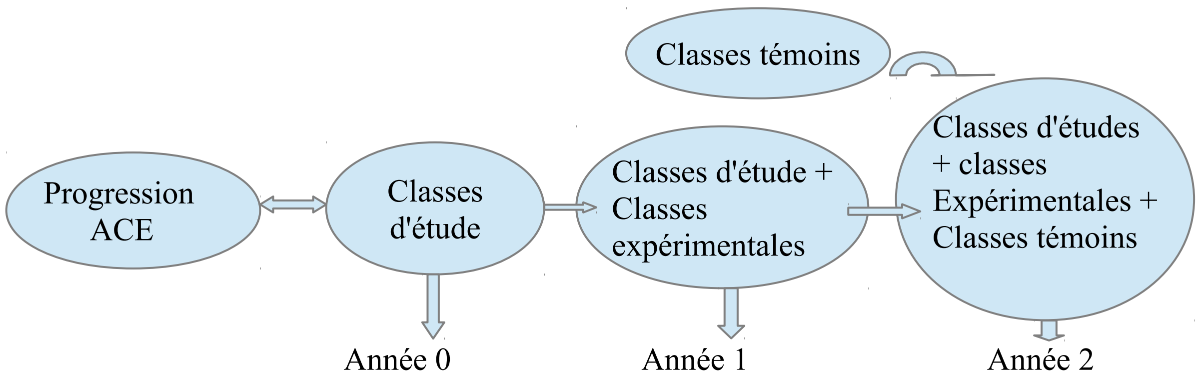
2. BREF HISTORIQUE

La convention ACE est signée avec la DGESCO en mai 2011. L'expérimentation est prévue sur trois années.

L'année 2011/2012 est une année de « test » que nous nommerons « l'année 0 de l'expérimentation». Ces tests sont réalisés sur un très petit nombre de classes. Ce sont les « classes d'étude », qui fonctionnent au sein d'un collectif institué en « ingénierie coopérative » (Sensevy, Forest, Quilio, & Morales, 2013 ; Sensevy, Forest, Quilio, Vigot, & Morales (2014)). Dans chacune de ces classes, le professeur des écoles est un maître-formateur. Plusieurs situations sont mises en œuvre et réalisées afin de les mettre à l'épreuve, d'étudier les choix réalisés et les effets constatés. Les enseignants des classes d'étude appartiennent et participent au collectif pour trois d'entre elles. Le collectif est constitué d'enseignants, de conseillers pédagogiques et d'enseignants-chercheurs. Ils discutent à la fois des « concepts » et des « morceaux de pratique » par des réunions régulières en vision-conférence et lors d'échanges de mails. Un des enjeux des travaux consiste à penser les modalités d'enseignement et d'apprentissage de la construction du nombre par les élèves sur le long terme.

L'année 2012/2013 correspond à « l'année 1 de l'expérimentation». Elle se poursuit dans quatre académies. Le nombre de professeurs augmente massivement et cela représente une centaine de classes. Lors de cette année 1, les quatre classes d'étude réalisent elles aussi l'intégralité des situations de la progression ACE avec un petit temps d'avance sur le groupe des classes expérimentales afin d'apporter d'éventuelles modifications à la progression. Toutes ces classes mettent en œuvre les modules de la progression ACE, à l'exception des classes témoins. Celles-ci entreront dans le dispositif lors de l'année 2. Pour mesurer les effets de la progression ACE, la comparaison se réalisera entre deux groupes : les classes expérimentales et les classes témoins. Nous précisons que dans les classes témoins, les professeurs enseignent les mathématiques selon des choix pédagogiques personnels. Les « élèves ACE » et les « élèves non ACE » seront soumis au même protocole de tests à des périodes déterminées (pré-test réalisé par l'équipe de recherche en début d'année scolaire ; post-test en fin d'année) .

L'année 2013/2014 correspond à « l'année 2 de l'expérimentation». L'expérimentation connaît un rythme croissant. En Bretagne (comme dans les autres académies), les quinze classes témoins participent à l'implémentation de la progression ACE. Le nombre de classes ne cesse d'augmenter dans les académies qui tentent l'expérimentation, ainsi que le montre la figure suivante :



Nous reviendrons sur les éléments évoqués précédemment. Nous désirons maintenant préciser la structure générale de la thèse.

Les trois premiers chapitres (Théorie et problématique ; Méthode ; La recherche ACE : éléments généraux) donnent les hypothèses et les enjeux de la progression ACE dans la construction du nombre. Il s'agit de donner à voir comment les conditions de l'élaboration du savoir mathématique peuvent être pensées mais aussi, comment ce processus d'élaboration peut concrètement se dérouler au sein des conditions pensées pour cela. Cela concerne aussi le cadre théorique. Les éléments retenus pour notre analyse sont issus de la Théorie de l'Action Conjointe en Didactique (TACD). Plus particulièrement, nous nous centrerons sur «*Le Sens du Savoir*» (Sensevy, 2011). Cette partie de la thèse comprendra également la description du recueil de données avec la méthodologie choisie pour l'analyse du corpus sélectionné.

La partie 1 et la partie 2 (Le Journal du Nombre, Anticipation), quant à elles, examinent les conséquences normatives de cette recherche. Nous entendons par normativité la construction d'un arrière-plan commun (pour la classe) pour tous les agents, qui orientent les fins qu'ils se donnent à eux-mêmes et les moyens (stratégies) qu'ils mettent en œuvre pour atteindre ces fins. Nous explorons ainsi les éléments de réorientation nécessaires dans l'élaboration de la construction du savoir mathématique. Nous faisons l'hypothèse de la nécessité d'une référence commune, dans la classe, appelée aussi « arrière-plan commun ».

La recherche ACE peut se décrire en différentes sphères (Sensevy et al. 2013). La sphère 1 correspond à l'ingénierie coopérative proprement dite et intègre les classes d'étude. La sphère 2 concerne les classes expérimentales. L'un des enjeux de la recherche ACE consiste dans l'élaboration d'un collectif de pensée qui englobe la sphère 1 et la sphère 2. Une autre sphère serait celle de diffusion de la recherche avec des objectifs de formation.
Le projet de cette thèse consiste à étudier précisément le travail dans la sphère 1, en particulier au sein des parties *Journal du Nombre* et *Anticipation*.

Nous sélectionnerons dans les premiers chapitres *(Théorie et problématique ; Méthode ; La recherche ACE : éléments généraux)* des thèmes comme points d'ancrage. Ils peuvent permettre de comprendre ce que nous définissons comme « les essentiels de la recherche ACE » au travers de la progression élaborée collectivement par le collectif de pensée propre à l'ingénierie coopérative.
Les thèmes retenus dans les parties 1 et 2 (Journal du Nombre, Anticipation) seront mis en comparaison et en synergie afin d'en montrer la richesse et la complexité. Ainsi, nous étudierons des notions mathématiques comme l'égalité et la différence avec l'usage des représentations, des signes, du langage et de propriétés comme la commutativité. Nous centrerons notre regard sur le temps didactique et l'avancée des savoirs avec une attention particulière dédiée aux « élèves moins avancés » et au travail du professeur.
Les notions de contrat et de milieu, quant à elles seront développées également lors des analyses dans les parties 1 et 2. Nous définirons alors précisément ce que nous entendons par l'équilibration didactique (Sensevy 2011) à l'aide de l'incitation productive collective. Enfin, nous donnerons à voir les réorientations nécessaires à l'élaboration du savoir pour tous les élèves et les professeurs, à partir des extraits de séances réalisées et analysées.

Au plan méthodologique, soulignons d'ores et déjà l'importance du film d'étude et le recueil de données associé à cette thèse. Les films enregistrés retracent l'intégralité des apprentissages dans le domaine des mathématiques menés au cours préparatoire durant deux années scolaires 2012/2013 et 2014/2014. Ils constituent donc la mémoire d'un pan entier pratique *in situ*.

THÉORIE ET PROBLÈMATISATION

Notre cadre théorique est la *Théorie de l'Action Conjointe en Didactique* (TACD) et les catégories développées pour l'analyse sont essentiellement issues de Sensevy, (2011) *Le Sens du Savoir*. Elles vont nous permettre de construire un langage commun nécessaire à l'analyse. La recherche est menée à partir d'extraits de transcriptions de séances vidéos et/ou de productions d'élèves. Notre arrière-plan conceptuel sera constitué de certaines catégories de la TACD, afin de comprendre ce qui se passe dans la classe filmée pendant les séances de mathématiques mises en œuvre lors de la progression ACE.[1]

Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord certaines notions de la TACD dans le but de définir précisément le vocabulaire qui sera employé lors de l'analyse empirique. Dans la première section *(Les notions théoriques noyaux),* nous examinons les notions de contrat didactique et ses évolutions à l'aide du système contrat et du système milieu. Nous précisons les notions de dévolution et de contrats différentiels. Ensuite, nous évoquons les catégories du quadruplet (définir, dévoluer, réguler et institutionnaliser) avec celles du triplet (mésogénèse, topogénèse et chronogénèse) et enfin, les trois descripteurs du jeu de l'action didactique (faire jouer le jeu, construire le jeu et les déterminations du jeu). Dans la section suivante *(La question cruciale du temps didactique)*, il s'agit plus particulièrement d'étudier la notion de temps didactique *et* nous traitons de la mise « en texte » du savoir, dans l'école classique, qui impose un temps spécifique à l'apprentissage. Ensuite, nous abordons en substance la question des ingénieries et du temps didactique spécifique aux situations. Nous terminons par une notion essentielle : l'équilibration didactique.

1. LES NOTIONS THÉORIQUES NOYAUX

Commençons par une notion essentielle utilisée en TACD, *le contrat didactique*.

1.1 Le contrat didactique, notion théorique construite par Brousseau

La TACD utilise la notion de contrat didactique décrit par Brousseau en1980. La définition suivante conçoit le système didactique comme un système d'habitudes qui engendre des attentes dans un jeu particulier.

> « Ce contrat » régit les rapports du maître et des élèves au sujet des projets, des objectifs, des décisions, des actions et des évaluations didactiques. C'est lui qui, à chaque instant, précise les positions réciproques des participants au sujet de la tâche et précise la signification profonde de l'action en cours, de la formulation ou des explications fournies…Il est la règle de « décodage » de l'activité didactique par laquelle passent les apprentissages scolaires. On peut penser qu'à chaque instant, les activités d'un enfant dans un processus dépendent du sens qu'il donne à la situation qui lui est proposée, et que ce sens dépend beaucoup du résultat des actions répétées du contrat didactique. Le contrat didactique

[1] Les catégories pour décrire et comprendre l'action didactique sont issues de « Le Sens du Savoir » Sensevy (2011) et « Agir ensemble ; L'action didactique conjointe du professeur et des élèves » sous la direction de Gérard Sensevy et Alain Mercier (2007)

se présente donc comme la trace des expériences des exigences habituelles du maître (exigences plus ou moins clairement perçues) sur une situation particulière. Ce qui est habituel ou permanent s'articule plus ou moins bien avec ce qui est spécifique de la connaissance visée ; certains contrats didactiques favoriseraient le fonctionnement spécifique des connaissances à acquérir et d'autres non, et certains enfants liraient ou non les intentions didactiques du professeur et auraient ou non la possibilité d'en tirer une formation convenable ». Brousseau, Glossaire.

La définition du contrat didactique ci-dessus met donc en évidence le poids des habitudes d'action dans la dialectique de l'ancien et du nouveau. Le contrat didactique est fortement implicite et constitue un système de normes défini par des règles d'usage qui nécessitent d'être d'élucidées afin que l'élève trouve par l'interprétation du professeur de quoi gagner par le jeu du décodage.

« C'est le contrat didactique inhérent à telle ou telle situation didactique qui déterminera la manière dont le problème sera traité. Le contrat didactique pourra ainsi se concevoir, à travers la règle de décodage qu'il représente, comme un système de règles d'usages liées au problème enjeu de l'activité ». Sensevy, 2011, p.100.

Ici, Sensevy montre un élément du contrat qui semble particulièrement important : la « règle de décodage » qui permet à l'élève de pouvoir jouer au jeu demandé dont dépend l'apprentissage-enseignement. Pour cela, donnons une seconde citation :

« Le contrat didactique propre à un savoir donné, dans un jeu didactique spécifique à ce savoir, constitue le système stratégique disponible au moyen duquel le professeur et les élèves vont jouer ce jeu ». Sensevy, 2011, p.103.

Le contrat didactique est donc né de l'action conjointe. Il est constitué, pour les élèves, de signes des actions répétées au sein des situations. Ces habitudes établissent alors un style de pensée dans lequel l'élève attribue des attentes au professeur au sujet de l'esprit du jeu.

« L'apport fondamental, au plan d'une génétique de l'action, du concept de contrat, dans la notion « maussienne » d'attente, et plus encore dans celle d'attribution d'attente, réside selon Sensevy en ceci : il faut voir l'attente et *l'attribution d'attente* comme une condition de possibilité et conséquence de l'action conjointe ». Sensevy, 2011, p.106.

Cela amène à distinguer deux composantes du contrat : une composante épistémique et une composante transactionnelle. La composante épistémique correspond au système de savoirs et de connaissances avec lequel un élève traite le problème et la composante transactionnelle réfère aux comportements du professeur pour orienter les élèves dans telle direction didactique. Les deux composantes épistémique et transactionnelle sont donc liées.

1.2 La définition de l'action didactique : premiers éléments

Les savoirs contenus dans la relation peuvent être définis comme des objets de communication. Ils sont également des objets transactionnels puisqu'ils permettent d'*agir en situation.* Le chercheur, s'il veut comprendre la relation ternaire, doit s'interroger sur ce que font le Professeur et l'Élève avec ces savoirs, étudier aussi la relation à ces savoirs et la situation dans laquelle ceux-ci prennent place. Il est essentiel de ne pas oublier l'action du sujet-agent qui doit être pensée en tant que co-action coordonnée comme nous le propose la citation suivante :

« Cette action didactique a deux composantes particulières. Tout d'abord, elle doit être considérée comme une action conjointe fondée sur une communication dans la durée entre un professeur et des élèves. Ensuite, elle est centrée sur un objet précis qui est le savoir transmis. Entre le savoir, le professeur et les élèves se crée une relation ternaire. En plus d'être une action conjointe et centrée sur le savoir, elle est aussi coopérative car « dans chaque action du professeur, l'élève trouve une place… ». Sensevy, 2007, p. 15

Ensuite, afin de pouvoir décrire les jeux d'apprentissage, les catégories de contrat et de milieu sont nécessaires :

« L'idée essentielle qui préside à la notion de jeux d'apprentissage consiste donc à utiliser conjointement deux descripteurs : le milieu et le contrat associés à un enjeu de savoir déterminé ». Sensevy, 2011, p. 136.

1.2.1 Système contrat, système milieu

Cette notion est essentielle afin de comprendre le jeu didactique. Le savoir est alors spécifié dans tel arrière-plan du contrat didactique spécifique à ce savoir. Comme nous le montre la citation ci-dessous :

« Dans cette perspective, le jeu didactique apparaît alors comme une sorte de correspondance entre deux systèmes : le système stratégique cristallisé dans le contrat comme potentiel d'action disponible, et le système stratégique cristallisé dans le milieu comme potentiel d'action virtuel. Le travail accompli par le Professeur et l'Élève dans le jeu didactique consiste à passer d'un système à l'autre, à utiliser le pouvoir d'assiMarthetion du système-contrat jusqu'à l'accommodation au système-milieu ». Sensevy, 2011, p. 100.

Le contrat est plus qu'une forme d'influence au processus didactique mais bien un système stratégique déjà-là à partir duquel Professeur et Élève jouent au jeu demandé. Il s'agit d'un système de capacités.

1.2.2 La dévolution

Il existe une implication mutuelle entre le Professeur et Élève qui représente l'action conjointe puisque plus le professeur jouera son jeu, de ne pas laisser l'élève produire des stratégies pauvres en savoir, plus l'élève jouera le sien sur la dévolution du savoir.

« Le professeur doit organiser les conditions de la dévolution, faire en sorte que l'élève prenne la responsabilité de l'apprentissage, qu'il assume la responsabilité de jouer vraiment au (le) jeu. C'est dire que cette nécessité de dévolution semble d'autant plus impérieuse que le professeur jouera vraiment lui-même le jeu, qu'il se refusera à contrevenir à la clause proprio motu, et qu'il ne dévoilera rien qui puisse amener l'élève à produire de stratégies gagnantes de faible valeur, parce que « pauvres en savoir » Sensevy, 2011, p.75

Mais comme le fait remarquer Sensevy, accepter d'agir de soi-même est toujours à replacer dans une situation.

« Assumer d'agir de soi-même, c'est assumer d'agir soi-même dans telle situation, dont la spécificité conditionnera précisément la prise de responsabilité ». Sensevy, 2011, p.75

1.2.3 Les contrats différentiels

Il est aussi nécessaire de penser le contrat didactique non plus dans sa forme d'origine et indifférent aux différences entre les élèves mais apte à prendre en compte les différences entre les élèves.

« L'existence d'un contrat didactique implicite et différentiel selon les élèves et la nature de la tâche en jeu trouve une vérification empirique également dans l'analyse des types de réponses fournies par les élèves dans différentes activités : en effet, grâce aux analyses a priori des différentes tâches, il a été possible d'identifier des classes de réponses attendues par le maître ainsi que leur hiérarchie d'excellence... ». Schubauer-Leoni, 1988, p.69.

Cette notion de contrat différentiel est fortement lié à la notion de capital d'adéquation que nous présentons ci-dessous :

« Dans l'économie symbolique de l'institution didactique, le capital ira au capital. Les élèves dotés en capital d'adéquation, prenant une part de plus en plus importante au jeu didactique, se rendront d'une certaine manière de plus en plus utiles au professeur et au déroulement du processus didactique. A l'inverse, les élèves pauvres en capital d'adéquation, sur lesquels le professeur ne pourra compter pour faire avancer le temps didactique, dont il ne saura espérer qu'ils vont pleinement saisir ses attentes, ceux-là risqueront de sortir peu à peu du jeu. L'effet essentiel de la distribution différentiée du capital d'adéquation consiste donc dans le clivage épistémique, entre les bien vus et les bien entendus de l'institution didactique, et les moins bien vus et les moins bien entendus de cette institution ». Sensevy, 2011, p.170.

Cela revient à dire que pour jouer au jeu demandé par le professeur, l'élève doit avoir *la capacité* de jouer correctement le jeu sous peine d'entraver le bon déroulement collectif du jeu, puis le sien même.

1.2.4 Les élèves « hors-jeu »

Pour cela, on peut faire l'hypothèse que le travail du contrat dans un milieu donné permettra aux élèves de produire un contrat et de s'y reconnaître afin de posséder la capacité à pratiquer le jeu.

« Il faut donc penser le contrat comme initialement (au moins) ouvert aux différences entre élèves, et penser le travail de l'action conjointe sur le contrat, dans un milieu donné, comme cette production *d'un contrat* dans lequel tous peuvent se reconnaître parce qu'ils ont joué les mêmes jeux d'apprentissage épistémiquement *denses* ». Sensevy, 2011, p.164.

L'élève même moins avancé produirait alors du savoir par l'étude du contrat dans un milieu donné.

1.3 Le jeu et ses milieux

« Considérons deux joueurs A et B. Pour gagner au jeu, le joueur A (l'élève) doit produire certaines stratégies et surtout les produire de son propre mouvement. Le joueur B (le professeur) accompagne bien sûr le joueur A mais B gagne si et seulement si A gagne, c'est-à-dire produit des stratégies gagnantes. « La situation se complexifie du fait que le joueur B est en général « juge et partie » dans le jeu didactique. Il doit en effet permettre à A, de façon indirecte, de produire des stratégies gagnantes, mais c'est aussi lui qui lui reconnaît ou non comme telles ces stratégies ». Sensevy, 2007, p. 20

Dans la partie en jeu, le joueur B qui est le professeur peut être tenté de reconnaître dans le comportement de l'élève (le joueur A) une stratégie gagnante qui ne l'est pas en réalité et « décréter le gain ». On parle alors d'un « effet Jourdain » Brousseau, 1998. Mais ce même professeur peut donner au joueur A des informations contenant le savoir pour produire des comportements « mimant » la stratégie gagnante. Ce sont des stratégies du « faire semblant » qui produisent un « effet Topaze » Brousseau, 1998.

Le professeur, donc, s'il veut réellement gagner doit faire preuve de « réticence » et taire certaines informations que le joueur doit trouver de lui-même. Pour cela, le professeur va produire des énoncés avec une forte valeur perlocutoire, ceci dans le but de « faire faire à l'élève » ce qu'il veut qu'il trouve. Ainsi le joueur A sait donc qu'il va trouver dans le comportement du joueur B (le professeur) de quoi gagner au jeu. Le professeur parle pour que les élèves agissent « convenablement » mais en retour, l'élève doit accepter de prendre une responsabilité plus grande que l'on nomme la « dévolution ».
Parlons maintenant des milieux du jeu, et du problème fondamental suivant : « *…comment fabriquer des milieux « adéquates » à la production, par « adaptation », des savoirs humains*. » (Sensevy, 2007, p. 25). Autrement dit, il s'agit, dans le cas des mathématiques, de produire, pour une connaissance donnée, une situation « à fort taux d'adidacticité » pour laquelle la stratégie gagnante sera la connaissance que le professeur cherche à faire approprier aux élèves.

Le milieu est dans ce cas défini comme antagoniste, c'est-à-dire insuffisant par rapport au contexte cognitif actuel des élèves. Ils ne peuvent apporter une stratégie gagnante, une adaptation est donc nécessaire et celle-ci se fera en grande partie grâce aux rétroactions du milieu qui réfutera les stratégies inopérantes et validera les autres.

« Cette modélisation, en effet, oblige à penser le savoir (et cela au prix d'un travail épistémologique et épistémique considérable) comme actualisé dans un milieu et une situation qui donne sens, et le jeu de celui qui apprend comme un système de décisions élaboré a priori et évalué dans son coût ». Sensevy, 2007, p. 26

Les jeux quasi-isolés ne constituent pas des situations d'apprentissage car ils ne peuvent se suffire à eux-mêmes. Le rôle du professeur est décisif et consiste à redéfinir l'expérience que les élèves ont eue, les connaissances en voie d'élaboration en savoirs partagés à l'intérieur du contrat didactique.

1.4 Milieu et contrat attachés à une situation : les jeux d'apprentissage, un aperçu

Une séance d'enseignement se caractérise par différents jeux d'apprentissage et l'apport d'un nouveau jeu d'apprentissage est conditionné par l'avancée du temps didactique. Il est alors intéressant de reconnaître le nouveau milieu mais aussi le nouveau contrat. Le milieu et le contrat permettent des jeux d'apprentissage mais aussi des formes de l'apprentissage-enseignement.

1.5 Un quadruplet : définir, dévoluer, réguler et institutionnaliser pour définir et décrire les jeux d'apprentissage

Dans ce modèle, le professeur doit définir le jeu et le dévoluer. Nous pourrions dire que définir le jeu consiste à « transmettre » les règles définitoires pour permettre le jeu. Il est nécessaire que les élèves aient compris à quoi ils jouent pour participer.

« Pour comprendre l'action des individus et des collectifs, il faut d'abord comprendre à quoi ils jouent, la logique de leur action. Pour cela, comprendre la manière dont les jeux sociaux sont définis, saisir au moment de cette définition, leur déploiement *in situ nascendi*, c'est le premier moyen de leur identification ».

C'est pourquoi Sensevy montre que

« le descripteur fondamental d'un jeu d'apprentissage, c'est le système contrat/milieu, c'est aussi appréhender, à travers les énoncés et les actions que produisent les règles définitoires, le contrat didactique déjà-là qui rend le jeu possible, et le milieu qui devra être assimilé ». Sensevy, 2011, p. 143.

Le jeu se déploie si les élèves acceptent de le jouer (la notion de dévolution). Ils établissent un rapport « adéquat » aux objets du milieu.
Le professeur doit pouvoir réguler les comportements des élèves pendant le déroulement du jeu afin que les élèves « adoptent » des stratégies gagnantes qui permettent la compréhension des règles stratégiques du jeu. Ce sont ces dernières qui permettent le gain.
Cela permet au professeur de reconnaître la construction des apprentissages chez les élèves par la reconnaissance de savoirs émergents. On peut définir de cette manière le processus d'institutionnalisation. (Brousseau, 1998).

Définir, dévoluer, réguler et institutionnaliser sont des notions qui permettent au professeur et au chercheur de se rendre attentifs aux modalités de construction du savoir dans la classe. Elles permettent de reconnaître les manières de faire, les habitudes d'action, les types de milieux et les ruptures apportées par la situation. Toutes ces catégories sont des descripteurs de l'activité didactique, qui permettent ainsi l'élaboration d'un « voir-comme » didactique.

1.6 Un triplet fondamental : mésogénèse, topogénèse, chronogénèse

La mésogénèse définit le changement de jeu d'apprentissage :

« Disposer de la catégorie mésogénétique attirera l'attention sur la manière dont le professeur va décider, à un certain moment, de changer le jeu d'apprentissage. L'efficacité de la catégorie, dans ce cas, tiendra précisément au fait que *c'est pour des raisons de milieu que* le professeur introduit un nouveau jeu ». Sensevy, 2011, p.147.

La chronogénèse dont nous reprendrons spécifiquement la notion dans la section 4, définit les états successifs du milieu :

« ...la description chronogénétique permet de décrire les états successifs relativement stabilisés du milieu (et leur signification pour le professeur et les Élèves), la description chronogénétique met l'accent sur le changement d'état et les raisons (qui tiennent également aux significations des éléments du milieu pour le Professeur et les Élèves) qui l'ont produit ». Sensevy, 2011, p.148.

La topogénèse définit le partage des responsabilités :

« La catégorie de topogénèse, d'une manière générale, cherche à décrire le partage des responsabilités dans les transactions didactiques ». Sensevy, 2011, p.149.

Il faut comprendre que ces catégories n'ont de sens qu'à travers le savoir qui les organisent, parce qu'il organise l'action conjointe, le Professeur et l'Élève étant reliés par le Savoir :

« Si le Professeur et l'Élève se reconnaissent mutuellement, ce ne peut être qu'à travers le savoir ». Sensevy, 2011, p.150.

Enfin les catégories aident à déterminer les jeux d'apprentissage et elles gagnent à être considérées ensemble :

« Ces catégories doivent également pouvoir être considérées en relation l'une avec l'autre, au sein du triplet ». Sensevy, 2011, p.150.

2. TROIS DESCRIPTEURS DE L'ACTION DU JEU DIDACTIQUE

Les transactions didactiques peuvent être décrites à trois niveaux au sujet de l’action du professeur. A un premier niveau, le professeur fait jouer le jeu *in situ*. Ce jeu, il l’a construit hors de la classe, ce qui constitue un deuxième niveau. Enfin, le dernier niveau concerne une catégorie de déterminants qui échappe au professeur et que Gérard Sensevy appelle les déterminations du jeu.

2.1 Faire jouer le jeu

Comprendre comment le professeur fait jouer le jeu et comment les élèves répondent à cette action suppose de considérer les actions du jeu en observant les interactions dans les milieux. Les transactions didactiques seront considérées comme des successions des jeux d’apprentissage décrits à l’aide des catégories formées par le quadruplet et le triplet des genèses. Un enjeu important réside dans l’articulation des différents descripteurs afin de se centrer sur un jeu particulier ou un changement de jeu.

2.2 Construire le jeu

On peut élucider la construction du jeu grâce à une « analyse a priori » (Mercier & Salin, 1988), qui sera utilisée par le chercheur pour analyser le savoir, les stratégies possibles des élèves, mais aussi pour comprendre le type d’analyse que le professeur fait, les tâches qu’il donne ainsi que l’organisation de son enseignement dans les systèmes stratégiques qu’ils peuvent mettre en œuvre. Pour mieux comprendre comment les professeurs construisent le jeu, nous aurons deux types de descripteurs : l’analyse épistémique propres aux savoirs eux-mêmes en lien avec l’analyse épistémologique des conceptions du professeur en rapport aux savoirs virtuellement contenus dans la situation.

2.3 Les déterminations du jeu

Les déterminations du jeu inciteront à considérer la classe comme une institution où le professeur est assujetti aux contraintes institutionnelles qui pèsent sur ses actions et le fonctionnement habituel de la classe. Ensuite, il faudra aussi tenir compte de l'épistémologie pratique du professeur, liée en tant qu'épistémologie des transactions didactiques à la conception de ce qu'est l'apprentissage, des difficultés éventuelles d'apprentissage, des différences entre les élèves …
Cette modélisation permet de décrire les contextes mais aussi d'identifier les changements de contextes imposés par l'intentionnalité des actions. Ceci nécessite la création de modèles afin de pouvoir articuler la théorie au réel.

« Être doté d'intentionnalité, cela signifie accorder un sens particulier à ses actes, parce que les actes sont accomplis au sein de collectifs, et trouvent leur forme dans le langage ». Sensevy, 2007, p. 41.
« La description et l'analyse de l'action humaine supposent la prise en compte du sens de leur actions pour les acteurs… les jeux auxquels les acteurs se prennent, ne peut se faire sans la compréhension, précisément, des raisons qui les font se prendre à tel ou tel jeu ». Sensevy, 2007, p. 41

Ce « voir-comme » permet d'attirer l'attention sur certaines dimensions de la pratique. L'activité telle qu'elle peut apparaître aux familiers de l'action, telle qu'ils pourront la décrire est nommée l*a sémantique familière de l'action.*
Le système descriptif de l'action avec toutes ces catégories descriptives doit se concevoir dans la perspective d'un système « complexe et organisé en niveaux de description ». Les strates descriptives (quadruplet, triplet, contrat et milieu) ne prennent leur sens que produites en synergie.

3. LE SAVOIR COMME PUISSANCE D'ACTION

En didactique on a souvent défini le savoir comme un *objet de savoir.* Mais il ne faut pas oublier que *savoir* veut dire aussi faire, dire, être et que le savoir comme puissance se manifeste toujours en situation.

« Les énoncés « denses en savoir » sont ceux qui ont la possibilité de modifier le milieu et de faire avancer le temps didactique ». Sensevy, 2007, p. 42

« *La notion de « continuité de savoir* » quant à elle, permet de penser d'une façon systématique la manière dont les énoncés didactiques intègrent ou n'intègrent pas le passé de la classe. Cette notion de « continuité des savoirs » est en lien avec « la mémoire didactique » (Brousseau et Centeno, 1991 ; Centeno 1995).

La notion d'expérience joue un rôle important et la distinction produite entre expérience *lato sensu* et expérience *stricto sensu* devrait permettre de faire des liens avec d'autres disciplines car comme, y insiste Dewey (1993), il y a des expériences communes et des expériences cruciales.

4. LA QUESTION CRUCIALE DU TEMPS DIDACTIQUE

4.1 La mise en texte du savoir

Dans *Le Sens du Savoir* (2011), Sensevy analyse la forme du système didactique classique. Celle-ci

génèrerait un temps d'enseignement peu favorable aux apprentissages. Pour étayer cette hypothèse, nous remontons à la génèse de l'École Ancienne, aux temps où il était possible de pouvoir parcourir le savoir dans tous les sens, parce que le corpus d'enseignement était inorganisé.
Comenius s'éleva contre cette idée propre à « l'éducation ancienne » qui consistait à faire apprendre « plusieurs choses à la fois ». Les choses à apprendre, autrefois, n'étaient pas pensées entre elles. Elles étaient sans progression. Il nait ainsi l'idée de la nécessité d'un enseignement organisé par une succession de choses bien ordonnées et introduites les unes à la suite des autres. Le maître devient le gardien du savoir, et du temps. Cela révolutionne l'École Ancienne.
Désormais pour penser l'enseignement classique, il sera donc nécessaire d'envisager le découpage du texte en éléments de savoir sur l'axe du temps. Sur cet axe temporel, le savoir s'étalera et le travail mnésique consistera à se rappeler convenablement le « bon énoncé ». Ce « juste énoncé » sera ensuite converti en outil de traitement des exercices proposés. Notons que dans l'école classique, la textualisation didactique classique assure à la fois « continuité et permanence » dans le curriculum comme nous le montre la citation suivante.

« La force et la faiblesse principale de la forme classique, dont Chevallard & Mercier (1988) montrent qu'elle s'initie avec Comenius (2002), réside précisément dans la textualisation du savoir. Le savoir est textualisé, mis en texte, en tant qu'il est apprêté, *élémenté* pour la transmission. Le texte du savoir est à la fois la condition et la conséquence du principe de programmabilité ». Sensevy, 2011 p.319

La forme professorale semble donc dépendre essentiellement d'*un texte du savoir.* Celui-ci conditionne l'enseignement-apprentissage à l'aide des éléments du texte du savoir. Ce « découpage » amènerait le professeur à penser le savoir à enseigner selon une progression de l'élément le plus simple au plus complexe. Les objets ainsi hiérarchisés garantiraient l'apprentissage. Cette progression du savoir fonctionne et s'accompagne d'un second découpage, celui du temps. Il reste alors au professeur à coordonner les objets de savoir sur l'axe temporel, comme nous le précise les deux citations ci-dessous.

« Le savoir s'étale sur l'axe temporel, et bientôt ne s'en distinguera plus. Le savoir se fait durée, le temps équivaut à du savoir. Principe neuf et décisif ». Chevallard & Mercier, 1987, p.41.

« La forme professorale se trouve surdéterminée par le texte du savoir. Pour le dire autrement, dans la forme didactique classique l'action peut toujours, d'une manière ou d'une autre, être représentée par un texte dont *les éléments sont des objets de savoir...* L'expression *« objets* de savoir *»,* ici, désigne le fait que le savoir est divisé en unités discrètes... Le principal effet de ce que l'on pourrait appeler la « textualisation didactique classique » est bien la transformation d'un processus continu en structure discrète, c'est bien une *discrétisation didactique du continu épistémique ».* Sensevy, 2011 p.320

Le professeur n'éprouve alors pas la nécessité d'une mémoire particulière des élèves dans cette forme didactique classique puisqu'il peut se contenter du livre du texte, du contenu. Centeno et Brousseau (1991) constateront alors que le professeur doit répéter très souvent le texte que l'élève doit apprendre. Ils nomment cela un « maître sans mémoire ». Aujourd'hui encore, la forme scolaire évolue en grande partie autour de cette révolution apportée par Comenius. Maintenant, nous allons observer d'autres formes scolaires et leurs effets sur le temps didactique.

4.2 Un temps spécifique didactique

Comme nous l'avons évoqué précédemment, la séquentialisation produite par le temps didactique classique du texte du savoir attribue à chaque séance une auto-suffisance. Pour cela, il faut envisager la progression de chaque séance construite comme une entité, un tout suffisant, clos sur lui-même pour faire apprendre tout ce qu'il est possible d'apprendre sur cet objet de savoir et ne plus y revenir. Il s'agirait de ne faire plus qu'une seule chose à la fois et de prendre tout le temps nécessaire pour cela. L'enseignement devient un ensemble de leçons déterminées et fixées. Et la progression définit un trajet commun pour tous. La durée et le savoir se superposent pour donner naissance au temps didactique. Comme tous les élèves doivent apprendre le même objet de savoir, en même temps, on trouve, ici, l'idée de contrats différentiels avec celle de l'institution d'un capital d'adéquation. (cf. ci-dessus « Les contrats différentiels et le capital d'adéquation », § 1.2.3). *Être dans le temps* et *dans le jeu* est la marque de l'adéquation.

Regardons maintenant, comment, dans une perspective radicalement nouvelle, la clarification conceptuelle suivie de l'analyse empirique de Centeno et Brousseau (1995) envisage le processus didactique comme un processus mémoriel.

« Il existe donc bien, dans cette forme nouvelle inventée par Brousseau, *un texte du savoir* (il ne aurait en être autrement) et un *temps didactique spécifique,* qui fait passer, nous dit Brousseau, de la question de rang n à la question de rang n+ 1 (par exemple, ayant constaté l'ordre pseudo-discret de D dans la transposition didactique classique, on va se poser la question d'une transposition au sein de laquelle on passe d'un ordre discret à un ordre dense). Mais ici, on le voit, textualisation mathématique et textualisation didactique sont en rapport constant, organique et nécessaire. Le texte est comme produit par l'articulation entre situation mathématique et situation didactique, et il a une fonction *génératrice*, aussi bien au plan épistémique (mathématique), dans la structure de problématisation qui le produit, qu'au plan didactique, dans les situations que le processus épistémique va appeler. Ici, le seul texte du savoir classiquement exposé ne saurait suffire, nous dit Brousseau « à déterminer le sens donné aux acquisitions par les situations spécifiques classiques choisies ». Par contre, la textualisation didactique classique oublie « fonctionnellement » l'expérience mathématique et l'expérience didactique ». Sensevy, 2011 p.320

La notion de l'expertise conçue par Brousseau et Centeno (1991) est envisagée davantage comme un processus dynamique plutôt que comme une accumulation de connaissances. Trois courtes citations vont nous permettre de cerner la notion d'expertise. L'expertise se caractérise par l'état de « connaisseur » dont la capacité est de produire différentes représentations de la réalité et d'agir sur celles-ci. Nous pourrions ainsi représenter cela ainsi : il s'agit de *connaissances dans* et non de *connaissances sur* parce qu'elles sont prises dans un système. Dans le temps didactique classique, l'expertise ne peut se construire puisque le « temps d'objet » n'envisage aucun retour ni aucun complément dans l'apprentissage. Les définitions suivantes de l'expertise illustrent ce que nous avons tenté de montrer ci-dessus.

« La définition de l'expertise, de ce qu'on pourrait concevoir comme un état de « connaisseur », ne tient pas à un « surplus » de connaissances, mais à la dynamique d'enquête, au potentiel stratégique qui lui est propre ». Sensevy, 2011, p.321

« On saisit comment l'expertise, dans ce cas, renvoie à la capacité de produire différentes représentations de la même réalité, et d'agir sur ces représentations ». Sensevy, 2011, p.321

« Les causes de cette interdiction de l'expertise, de cette impossibilité de parvenir à la fin (raisonnable) d'un apprentissage, tiennent bien au temps d'objet, et à son corollaire épistémologique, que Chevallard met en évidence, le fait que « lorsqu'un objet de savoir O est introduit, *il doit être enseigné complètement, d'un coup, sans retour.* Rien de ce qui suivra du cours du temps ne devra remettre en cause ce qui aura été mis en place en cette occasion ». Chevallard, 1991, p.30.

L'enseignement d'un objet de savoir *élémenté, complètement enseigné d'un coup et sans retour* devient une clause fondamentale du temps didactique classique. A priori, elle écarterait toute incertitude de la connaissance, toute remaniement. Pourtant, elle semble aboutir à un paradoxe. Comme un apprentissage n'est jamais terminé parce que très vite enseigné, trop vite enseigné, il est précisément très vite terminé. Sensevy parle de « savoir enseigné encapsulé ». L'apprentissage ultérieur chasse le récent savoir « encapsulé ». Une conséquence au découpage serait la *déconcertation cognitive* (Chevallard, 1991), nullement profitable à l'apprentissage. Elle peut devenir permanente chez l'élève comme nous le montre la citation ci-dessous.

« Car le refus systématique » de l'incertitude n'annule pas toute incertitude. Pis, dans la mesure où l'élève se voit soumis à de perpétuels débuts d'apprentissage – une chose après l'autre -, dans la mesure où il ne parvient que très rarement au sentiment d'une maîtrise tant soit peu accomplie des situations qu'il doit affronter, *l'incertitude est pour lui partout*. Pour lui qui est, presque chaque jour, au début d'un nouvel apprentissage, la déconcertation cognitive est de tous les instants. Mais les acteurs du système sont peut-être les plus mal préparés à affronter ce destin. Le professeur ne comprend pas que l'élève ne s'y retrouve pas, alors qu'il aura tout fait pour lui simplifier la vie. L'état de déconcertation, *normal en début d'apprentissage*, et encore sensible dans ces relations volontaires où l'élève pourrait trouver l'occasion de travailler sa technique, devient l'état permanent, que rien de raisonnable ne semble pouvoir expliquer. L'élève lui-même ne se l'expliquera pas davantage ; s'il ne s'en dégoûte pas, il y verra la preuve tangible de son incapacité indéfiniment exposé. Ainsi naissent les tensions dans la classe, dans l'École et autour de l'École. Chevallard, 1991, p.44.

Afin d'atténuer le phénomène de déconcertation cognitive permanent, l'idée première de Sensevy, (1998) consistait dans l'élaboration d'une forme didactique qui rendrait improbable une telle déconcertation. En effet, l'hypothèse est la suivante : la déconcertation est organiquement liée à la « défonctionnalisation » opérée par certaines formes de textualisation du savoir dans le processus de transposition didactique, puisque les élèves ne sont pas tous sensibles aux effets du temps de l'objet et à l'épistémologie inhérente. Pour cela, nous allons évoquer rapidement le concept de dévolution défini par Brousseau.

« l'enseignement d'une opération arithmétique est souvent essentiellement fondé sur la communication d'une procédure de calcul associée à un petit univers de problèmes qui est supposé en présenter le sens. Les problèmes de dévolution se posent de façon plus impérieuse et plus évidente pour un enseignement fondé sur l'étude d'une relation. Il s'agit d'introduire, de cette manière, la soustraction avec des enfants de 7-8 ans ». (Brousseau, 1988, p.304)

Le monde des professeurs afin d'éviter le dogmatisme, nous dit Brousseau (Ibid .) présente les savoirs à enseigner comme des réponses à des *questions*. Les questions forment alors une introduction et une justification aux connaissances à acquérir. L'essentiel de l'enseignement devient la production de réponses à ces questions. En fait, ces réponses sont essentiellement des procédures dont les questions introductives correspondent à une sorte d'accompagnement du savoir à enseigner. Ces « réponses » détachées de leur contexte représentent des algorithmes, c'est-à-dire des réponses acquises pour des questions à venir sur lesquelles l'élève ne sait pas grand chose (Brousseau, Ibid.). Le savoir n'est alors pas mis en tension avec d'autres savoirs.

« La déconcertation peut être ainsi ramenée, dans le cas précis (celui de l'enseignement d'une opération arithmétique), dont je montrerai qu'on peut et qu'on doit le généraliser, à ce qui se passe lorsque les algorithmes communiqués par le professeur sont détachés de leur contexte, et des questions épistémiques auxquelles ils pourraient permettre de répondre sont oubliées, phénomène que l'on pourrait désigner sous le terme générique d'*algorithmisation de l'enseignement*. A ce qui se passe, donc, lorsque le savoir est sans avenir, et cela puisqu'on n'éprouve pas ce qu'on apprend, on n'en fait pas *l'expérience,* ni dans les problèmes concrets que le savoir permet de résoudre, ni dans la mise en tension de ce savoir avec d'autres, passés ou à venir. Autrement dit, anticipant un peu mon propos, je soutiendrai que la déconcertation cognitive, pour retrouver à la fois le principe d'expérience et le principe de fonctionnalité, est une conséquence du manque d'expérience didactique cruciale, ce manque-ci étant lui-même produit par le manque de fonctionnalité des savoirs appropriés ». Sensevy, 2011, p.324

La citation suivante peut faire appréhender la fonctionnalité du savoir fondée sur une puissance d'agir spécifique.

« Le processus de transposition didactique repose en particulier sur les principes de désyncrétisation, dépersonnalisation, et de programmabilité. On la dit, le principe de *fonctionnalité* du savoir suppose la *simulation* de l'activité épistémique savante dans l'activité didactique, obtenue par l'élargissement de la notion de problème scolaire à celle de *situation* (mathématique et didactique).Cette fonctionnalité est de fait une *double* fonctionnalité, interne – dans le savoir lui-même en tant qu'*objet* – externe – dans le rapport au savoir avec la réalité en tant qu'*outil*. Cette fonctionnalité, je l'ai précisé, est une fonctionnalité pratique, pragmatique, dans la mesure où ce n'est pas seulement le savoir au sens strict dont on vise une certaine appropriation, en particulier dans ces algorithmes associés à une petite collection de problèmes qu'évoquait Brousseau, mais bien plus une action fondée sur une puissance d'agir spécifique dont le savoir pourvoit. » Sensevy, 2011, p. 324

« En effet, la simulation fonctionnelle suppose, comme Brousseau l'a affirmé et mis en œuvre, la production d'une collection, d'un *système* de situations. Le sens de la connaissance enseignée n'est pas dans l'une de ces situations, mais dans l'ensemble ». Sensevy, p.325

Cette autre citation nous aide à montrer l'importance cruciale de la notion de système dans la forme de l'apprentissage-enseignement.

« Cette référence [la référence « fonctionnelle »] leur permettra de sémantiser les différentes décisions mathématiques qui seront les leurs, en renvoyant à une expérience antérieure qui leur permettra un contrôle de leurs actes. Elles leur permettra également de produire des inférences parentes de celles des opérées par le professeur dans l'action didactique conjointe. Mais le processus de simulation fonctionnelle ne s'arrêtera pas là : les élèves, nous avons commencé à le montrer, devront prendre conscience que l'appel à des situations antérieures de la « collection » ne suffit pas, et qu'il existe une manière plus rapide et plus sûre, en l'espèce, que l'usage qui correspond à chercher l'image de 1, pour déterminer l'application composée [Sensevy fait ici référence ai module 8.3 de *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire* (Brousseau N & G, 1987). Le sens de la connaissance n'est pas dans l'une des situations étudiées, il est dans leur ensemble, dans leur système, c'est ce que j'ai appelé la nécessité de holisme épistémique dans la simulation fonctionnelle ; mais ce holisme épistémique est un « holisme du problème » dans la mesure où *l'agencement temporel* des situations oblige l'élève à accommoder, à ne pas pouvoir se satisfaire des solutions fournies par le contrat (ici la recherche de l'image 1) ». Sensevy, 2011, p.325

Le système de situations est un agencement stratégique. Il est temporel puisque certaines situations vont reposer sur un milieu antagoniste. La constatation de cette insuffisance fonctionnelle pourra amener au « dépassement » de cette accommodation au nouveau milieu. Le travail de Centeno (1995) fait comprendre que le temps des situations n'est pas le temps des objets. Pour compléter notre propos, voici deux citations.

« On saisit l'importance cruciale, dès l'élaboration de l'ingénierie, de la temporalité du savoir. La *genèse artificielle* du savoir repose sur l'expérience didactique des élèves, et doit donc correspondre à un processus mémoriel spécifique dans une temporalité nouvelle ». Sensevy, 2011, p.341.

« Le temps des situations est donc un temps de la continuité de l'expérience, comme je l'ai dit ci-dessus, mais d'une continuité qui intègre nécessairement ces ruptures ». Sensevy, 2011, p.341.

C'est donc la structure du *moment* qui donne la mémoire. On perçoit que « le problème des « retours » ; de leur prise en compte ou de leur bannissement dans l'organisation du processus didactique, relevé par Chevallard et Mercier (1987) est essentiel.

« Le travail de Centeno (1995) fait préciser comprendre que le temps didactique propre aux ingénieries broussaldiennes est un *temps de situations*, qui peut fonctionner comme tel parce que les situations sont structurantes de l'expérience des élèves, et peuvent à chaque instant être réexpériencées, la plupart du temps sous l'action du professeur ». Sensevy, 2011, p.332

4.3 Les ingénieries

Regardons maintenant comment le savoir et le temps cohabitent au sein des ingénieries. Puisque la séquentialité provoquerait la déconcertation cognitive, quels sont les moyens à disposition du professeur pour tenter de remédier à cela ?

« Un premier moyen, pour le professeur, de limiter la déconcertation cognitive, réside dans sa manière de réguler la chronogénèse... » Sensevy, 2011, p.368

L'élève travaille alors dans « son propre temps d'étude ». Celui-ci est inclus dans le temps de l'étude de la situation. On peut alors conférer à l'ingénierie la fonction suivante :

« L'enseignement décrit ci-après [Brousseau, on l'a vu, a pour ambition de faire passer les questions du domaine de l'enseignant à celui de l'élève, d'enseigner les questions autant que les réponses, et autant que possible d'enseigner les connaissances avec leur sens ». Brousseau, 1998, in Sensevy, 2011, p.345

L'ingénierie permettrait alors la création des conditions de l'enseignement d'une relation plutôt que la communication d'un algorithme associé à un petit univers de problèmes. A partir d'une ingénierie de Brousseau, la situation des rationnels et décimaux, on peut commencer d'évoquer la notion d'équilibration didactique, qui sera reprise ci-dessous.

« Comme tout idéaltype (Weber, 1904), elle (la situation des rationnels et décimaux) fournit un tableau de traits pertinents dont on peut postuler qu'ils figurent, de façon plus ou moins développée, dans tout le travail d'équilibration produit au sein de dispositifs architecturés dans cette double fonctionnalité....à cause de sa situation épistémique ». Sensevy, 2011, p. 345.
D'ailleurs, mieux que d'idéaltype, sans doute pourrait-on parler ici d'exemple exemplaire, au sens de Kuhn (1990) :

« Avec la notion d'exemplaire Kuhn s'inscrit ainsi dans une conception de la cognition où ce ne sont pas des « règles » qui déterminent l'action des individus, mais bien ce qu'il appelle « la perception acquise des siMartherités » (Kuhn, 1990, p.422), perception fournie justement par la pratique des *exemplaires ».* (Notes de bas de page 346 Sensevy, 2011)

Le travail d'équilibration didactique se construit ainsi autour de la position topogénétique du professeur. Tantôt, le professeur use de la réticence. Tantôt il se trouve en position d'expression.

« La leçon porte donc en elle même une nécessité de régulation complexe, qui permette une dialectique fructueuse entre référence au sens mathématique et pragmatique du savoir, et technicité ». Sensevy, 2011, p.346

Ce sont les aller-retours dans l'étude du savoir dans la situation qui inscrivent le savoir dans la mémoire de la classe. Avec « Les rationnels et décimaux », c'est bien la rencontre de l'ignorance qui amène l'élève à la recherche de la fraction commensuration.

« En résumé, je résume par « équilibration didactique fonctionnelle » une équilibration contrat-milieu fondée sur la double fonctionnalité (épistémique et pragmatique) ». (Notes de bas de page 349, Sensevy 2011)

Cette situation va donc jouer un rôle d'emblème et le fait de retrouver une situation ne sera pas un simple rappel.

« Contrairement au maître sans mémoire qui ne peut que répéter, le professeur, au sein du temps de situation didactique, peut tenter de revivifier une expérience didactique pour permettre aux élèves de retrouver la connaissance en retrouvant sa fonction d'alors ». Sensevy, 2011, p.355

Comme nous le montre la citation suivante, c'est bien la reviviscence de la question posée qui enclenche la reviviscence des situations et des moyens employés.

« En effet, la reviviscence des situations passées, en temps de situation, ne se résume pas à la simple *réassiMarthetion* d'une procédure, elle ressortit à une véritable *réaccommodation* aux situations passées « adéquates », qui suppose la reviviscence de la question posée(du problème qu'il fallait résoudre), des moyens employés pour le résoudre, du langage utilisé pour « parler ces moyens », en même temps que des éléments qui peuvent apparaître anecdotiques mais qui auront dans certains cas un rôle décisif dans la reviviscence. Cette nouvelle accommodation est donc coûteuse pour l'action conjointe. Elle coûteuse en temps et en énergie, mais elle est aussi conceptuellement coûteuse, on l'a vu en passant, dans la reviviscence impossible, au sein de la même leçon mise en œuvre par un autre professeur, à laquelle, je faisais allusion ci-dessus ». Sensevy, 2011. (cf.note 37).

La hiérarchisation des priorités épistémiques permet au professeur de choisir les gestes d'enseignement nécessaires à l'équilibration didactique.

« Elle suppose en particulier, cette nouvelle accommodation, une hérarchisation des priorités épistémiques très clairement exprimée à la fin de l'auto-analyse produite par le professeur immédiatement ci-dessus : la division fait partie de cette leçon, mais elle n'y est pas essentielle (« c'est le sens de la fraction que les élèves construisent c'est la commensuration »). La valence épistémique du processus d'équilibration fonctionnelle est ici première. Le travail professoral de régulation prend sa source dans les fondements épistémologiques de l'ingénierie ». Sensevy, 2011, p. 358

Le pouvoir épistémique est alors contenu dans certains énoncés, en particulier, pour ce qui concerne l'ingénierie de Brousseau étudié par Sensevy, dans « l'énoncé de commensuration », qui représente ici un exemple exemplaire d'un certain usage du langage au sein des ingénieries.

« Le travail mémoriel est inséparable du travail linguistique. L'énoncé de commensuration intervient comme un résumé d'expérience, comme résumé de l'expérience cruciale … Mais c'est parce qu'il est ainsi rattaché à l'expérience, c'est parce qu'il est toujours en quelque sorte « accompagné » par l'expérience qu'il résume, que cet énoncé détient son pouvoir épistémique ». Sensevy, 2011, p.360

Le système stratégique du professeur est ainsi lié aux faits passés, présents et futurs de la classe.

« Le système stratégique du professeur est profondément temporalisé dans l'équilibration fonctionnelle : la plupart des actions produites le sont en référence à ce qui est advenu comme à ce qui va venir. *L'hic et nunc*, s'il est nécessairement source de l'action conjointe, n'en forme jamais l'horizon, passé ou présent ». Sensevy, 2011, p. 360.

Nous terminons par cet élément essentiel. C'est l'élève qui est alors à l'origine dans le travail du professeur.

« …mais travailler dans un système de situations, c'est permettre à l'élève de faire l'expérience de la fonctionnalité du savoir et pour que cette expérience lui soit possible, l'élève va être institué en *origine du travail professoral »*. Sensevy, 2011, p. 360.

5. L'ÉQUILIBRATION DIDACTIQUE

Ainsi que nous l'avons décrit, le processus d'équilibration didactique permet aux élèves de partager l'intention d'enseigner pour se donner l'intention de s'enseigner et n'est jamais indépendant du jeu de l'élève à la relation contrat-milieu.

« Il y a donc nécessité d'une lucidité professorale, exprimée en acte dans l'action conjointe, quant à ce qui doit être déjà là, ce qui doit faire contrat, ce qui doit être institué, pour que le travail d'équilibration puisse être mené à bien. L'équilibration est donc bien un travail sur la relation contrat-milieu, mais aussi un travail en soi sur chacun des deux éléments de la relation ». Sensevy, 2011, p. 278.

Comme nous l'avons vu, l'équilibre didactique s'appuie alors sur la catégorie réticence-expression puisque le jeu didactique repose sur le double processus sémiotique et énonciatif. Par exemple, le professeur reprend les propos d'un élève et les charge d'un poids particulier (travail énonciatif) dans un milieu discursif et les érige en signe pertinent (travail sémiotique).

« C'est bien l'idée essentielle du contrat dans l'action conjointe : le contrat situe l'action. Ce processus de situation de l'action, d'orientation de l'action, constitue un élément essentiel de l'équilibre contrat-milieu et du processus d'équilibration ». Sensevy, 2011, p.245.

L'analyse montre que le professeur établit un équilibre subtil entre gestuel et gestion de l'incertitude afin de laisser ouvertes certaines possibilités.

« On peut percevoir alors tout particulièrement comment la réticence constitue une caractéristique particulière du rapport expression-contenu propre aux transactions didactiques, et ne signifie en rien le silence. Au contraire, pourrait-on dire, puisque la réticence du discours professoral est bien dans des cas (notamment dans les formes ouvertes du type « débat », mais aussi dans beaucoup d'autres) assurée par une forte densité dialogique ». Sensevy, 2011, p.241.

En somme, le processus de l'équilibration didactique est donc assuré lorsque la relation contrat-milieu atteint un certain équilibre. L'équilibration didactique fait alors avancer le temps didactique et le système stratégique produit est la meilleure adéquation au réel sans altération des jeux.

MÉTHODE

1. LE RECUEIL DE DONNÉES

L'année de « réalisation de niveau 0 », ce sont essentiellement les situations du domaine *Situations* qui sont testées et enregistrées, à la fois dans une classe de cours préparatoire et dans une classe de cours élémentaire de la même école. Afin de pouvoir analyser les transactions entre les élèves et le professeur, nous faisons le choix d'une mise en œuvre dont la modalité de travail est en demi-classe pour le C.P. Une partie de la classe est avec le professeur titulaire du C.P pour des activités de lecture pendant que le chercheur-professeur (alors titulaire du CE1) est avec le second demi-groupe d'élèves pour le jeu des annonces « Dé et doigts » dans une autre salle de l'école. Ensuite, les professeurs échangent leurs groupes. Les séances de mathématiques sont donc réalisées par le même professeur qui met également en œuvre dans sa classe des séances inspirées du jeu des annonces à destination des élèves de C.E 1.
L'année de « réalisation de niveau 1 », ce sont toutes les séances des quatre domaines (*Situations, Résolution de problèmes, Calcul Menta*l et logiciels informatiques *Estimateur* et Tux of Math) qui sont enregistrées à partir de deux caméras présentes dans la classe. Nous développons les caractéristiques du montage d'enregistrement et de stockage dans le paragraphe ci-dessous.
L'année de « réalisation de niveau 2 » capture elle aussi toutes les séances d'enseignement-apprentissage pour les mathématiques dans les quatre domaines. Lors du passage de l'année de « réalisation de niveau 1 » à l'année de « réalisation de niveau 2 », la progression ACE connaît certaines modifications. Il semble important de filmer tous les moments sans distinction. L'enjeu consiste aussi dans la compréhension des effets initiées par les changements. Au total, pour ce qui concerne la progression ACE dans son ensemble (sur l'année scolaire entière), ce sont donc deux années consécutives qui ont été filmées.

Les séances sont donc enregistrées sur des cartes numériques. Elles sont ensuite recopiées sur des disques durs de capacités variables. Nous avons onze disques durs qui retracent l'histoire des trois années d'expérimentation. La surface de stockage nécessaire pour une masse de données aussi importante reste problématique. A l'avenir, pour la suite de cette recherche, il nous faudra sans doute repenser le stockage pour éviter toute perte de données.

2. UN MONTAGE PERMANENT DANS UNE CLASSE DE COURS PRÉPARATOIRE

L'objectif général du montage est la capture de tous les temps d'enseignement-apprentissage appartenant au domaine des mathématiques et de la recherche ACE, sur la totalité de l'année scolaire et plus. Le cadre théorique de référence, comme nous l'avons évoqué, reste la Théorie de l'Action Conjointe en Didactique (TACD). Elle rend compte des relations entre le savoir, les élèves et le professeur. Pour filmer les séances de classe c'est-à-dire capturer les images et le son sur un temps aussi long sans sélectionner un élément particulier (une orientation de cadrage), cela nous oblige à ne pas restreindre le regard par une entrée unique. Le choix d'une seule caméra offrirait un angle de vision et un regard partiel sur la classe (et sur les séances filmées). La décision s'impose alors de penser une installation avec deux caméras afin de multiplier les entrées et le recueil d'indices (les signes) de la construction du nombre. La caméra (éventuellement) mobile près du tableau est sur pied et posée sur le sol tandis que la caméra fixe est sur une tablette en hauteur. Ainsi les hauteurs différentes des caméras filment et attestent des différences comme des similitudes.

Les séances filmées de la progression ACE tout au long de l'année de C.P

Photographie n°1 : vue d'ensemble depuis la caméra fixe
Date, année 2011-2012

La caméra fixe filme une vue d'ensemble de la classe et « donne à voir » le savoir avec notamment la centration sur le tableau, le professeur et les élèves. Elle « s'accompagne » d'une seconde caméra qui peut retracer lorsqu'elle est déplacée par le professeur-chercheur plus spécifiquement les actions, les interactions (les élèves et le professeur ou d'élève à élève), ainsi que l'élaboration progressive du savoir dans une temporalité autre, celle de l'élève. Elle permet le suivi des « épisodes » didactiques de la leçon. On pourrait dire que la caméra fixe est une représentation générique de la séance de mathématique tandis que la caméra mobile est une représentation spécifique de la même séance.
La construction du savoir, enjeu du dispositif, s'inscrit sur les deux caméras par une focalisation sur

des temps différents. Le tableau de la classe est le témoin de l'avancée du temps didactique capturé par la caméra fixe. Les rythmes d'apprentissages individuels et les épisodes didactiques sont enregistrés avec la caméra mobile avec des plans plus resserrés. Les traces de l'élaboration du savoir consistent ainsi en deux films d'étude[2]. Ils montrent à la fois l'avancée du temps didactique mais également le travail de l'élève dans sa propre durée. Nous présentons deux photographies, la première photographie montre la caméra mobile près du tableau et la seconde photographie présente la caméra fixe.

La caméra mobile pour un plan rapproché et le suivi des transactions

Photographie n°2 : la caméra mobile
Date, année 2011-2012

La caméra mobile positionnée près du tableau n'est pas fixée au sol. Cette option permet de la déplacer en fonction des différentes modalités de travail choisies, par exemple comme pour la mise en place du groupe « anticipation » ou d'un groupe de « reprise ». Elle enregistre les images des élèves de face.
La caméra fixe, quant à elle se situe dans le fond de la classe, près du plafond sur un porte-télévision vissé au mur que nous illustrons d'une photographie.

2 La notion de film d'étude est notamment développée dans le chapitre 6 du *Sens du savoir*, téléchargeable ici : http://python.espe-bretagne.fr/sensevy/sensdusavoir/

La caméra fixe pour un plan d'ensemble de la classe et une centration sur le tableau

Photographie n°3 : la caméra fixe en hauteur
Date, année 2011-2012

Pour perdurer sur une année scolaire, le temps d'installation et d'allumage du montage doit être restreint. Pour cette raison, le matériel est laissé à disposition dans la classe afin que le professeur-chercheur dispose à la fois du matériel nécessaire pour l'enregistrement et qu'il soit autonome pour une mise en route rapide. Il existe plusieurs avantages à la permanence de la présence du dispositif dans la classe. Tout d'abord, l'indifférence des élèves et du professeur « aux enregistrements ». Ils finissent par ignorer la présence du montage. Les caméras deviennent des objets permanents et « anodins » et les élèves ne les remarquent plus. De plus, la mise en route quotidienne des caméras, matin et après-midi, instaure une habitude de classe et contribuent encore à banaliser ces « objets ».
Le montage permet aussi l'enregistrement des temps qui appartiennent à la « périphérie de la leçon » comme l'installation des élèves en groupe, le rangement... Ces temps décrivent la réalité de la classe et sont rarement filmés.
Les enregistrements sont donc des films d'étude sur la construction de notions mathématiques au cours préparatoire. Ils retracent aussi les conditions mises en place par le professeur pour les enseigner et les expériences que les élèves construisent de cette action.

L'autonomie du professeur est une autre caractéristique du montage choisi. En effet, le professeur est en capacité de filmer tous les moments prévus mais également de s'adapter et modifier le plan de route (horaires, séances, organisation...).
Un autre impératif renvoie à la qualité technique des enregistrements produits : nous souhaitons une bonne qualité d'images (pour le relevé des signes) et un son « audible » (pour transcrire les séances). Devant ces contraintes fortes, des questions se posent sur le choix du matériel pour l'enregistrement et le stockage des données de masses importantes.

Un professeur équipé d'un micro-cravate

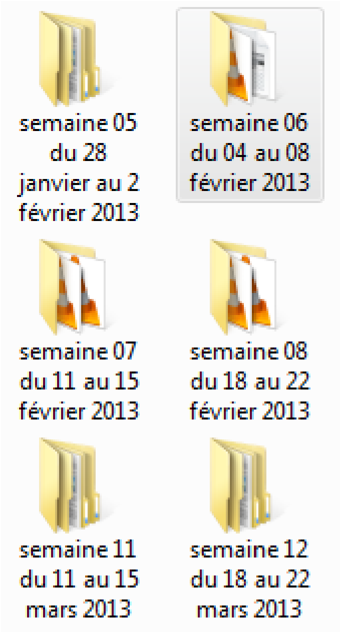
Photographie n°4 : un professeur autonome pour les enregistrements des séances
Date, année 2011-2012

Le choix de l'ajout d'un micro-cravate pour le professeur et d'un micro suspendu permet d'améliorer l'enregistrement des voix et donc des échanges enregistrés. Cela compense certaines voix d'enfants peu fortes.

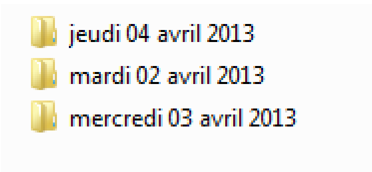
Les séances sont intégralement filmées et enregistrées comme nous l'avons évoqué. Nous pensons que la masse de données est essentielle pour observer et analyser des phénomènes didactiques en sciences humaines et sociales parce qu'elle permet de travailler sur la durée longue. La durée permet aussi de percevoir et de garantir l'authenticité des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage observés et analysés par le rapprochement opéré sur la réalité. Même si les vidéos ne sont pas la réalité, le filmage quotidien annihile la présence intrusive des caméras dans la classe et leurs effets sur le comportement des acteurs. Ensuite, nous formulons l'hypothèse que la confrontation avec le temps très long permet aux agents d'abandonner le contrôle de leur image et garantit sous un certain aspect les résultats de la recherche.

3. LE CHOIX DES DONNÉES

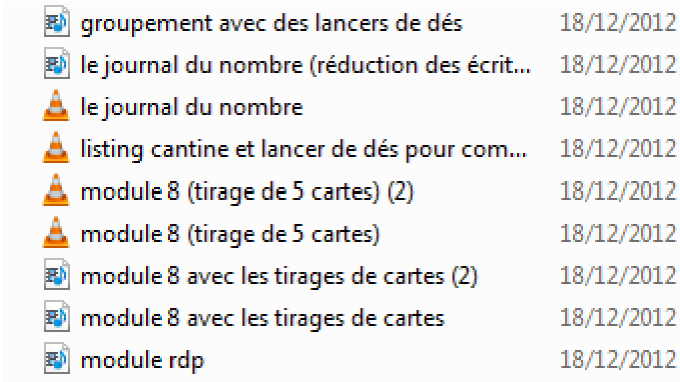
L'archivage des données a évolué afin de favoriser le repérage dans la masse de données. La première organisation consistait à glisser les fichiers vidéos copiés dans des dossiers-semaine dans lesquels se trouvaient des fichiers-jours. La recherche d'un fichier spécifique n'est alors pas aisé parce que les caméras fragmentent la séance en plusieurs fichiers vidéos. La seconde organisation prévoit un premier filtre puisque c'est le chercheur-professeur qui réalise la mise en œuvre de la séance, la copie et possède la mémoire du vécu de la classe. Il peut ainsi annoter le fichier par un élément spécifique. Sont données à voir ci-dessous successivement les organisations en fichier-semaine, en fichier-jour, et avec l'organisation filtrée au plan du contenu « large » des séances.



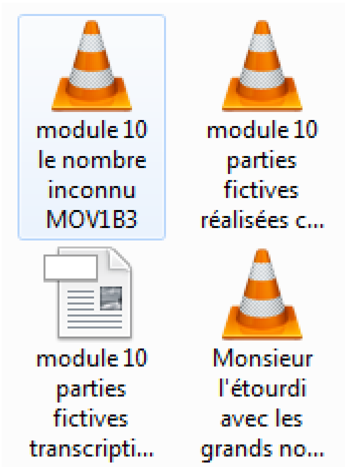
L'organisation en fichier-semaine



L'organisation en fichier-jour



L'organisation avec un premier filtre, les modules



L'organisation avec un premier filtre, la situation

Ensuite, le choix pour les éléments à analyser s'est porté sur la compréhension de savoir à partir de l'égalité et de la différence/soustraction dans le « *Journal du Nombre* » et le groupe « *Anticipation* ».

4. LA POSITION DE CHERCHEUR-PROFESSEUR

La recherche sur la construction du nombre élaborée par le collectif ACE pendant ces trois années s'est déroulée en partie dans ma classe puisqu'elle est incluse dans le groupe « classe d'étude ». Cette classe est située dans une école de ville fréquentée par des élèves de milieux sociaux professionnels « moyens ». Une partie de la population est issue de l'émigration, composée de familles turques et marocaines habitant la zone d'éducation prioritaire. Ces élèves n'étaient pas « habituellement » scolarisés à l'école où l'expérimentation s'est déroulée mais lors d'une fermeture dans ce secteur géographique, un certain nombre de familles a fait le choix de scolariser leurs enfants hors de celui-ci. Cela correspond à 30% de l'effectif des élèves de l'école. Elle est aussi une école de quartier, attachée à l'ESPÉ (ancien IUFM, ayant pris lui-même la suite de l'École Normale de Garçon).

La position que j'ai choisie est une position de chercheur-professeur afin de rester au plus près du terrain tout en s'inscrivant fortement dans un modèle théorique.

L'ingénierie didactique pensée s'ancre profondément dans le terrain et les modules conçus des quatre domaines doivent être expérimentés plusieurs fois afin d'en pointer les atouts mais aussi les limites et/ou les améliorations possibles. C'est le rôle des classes d'étude d'expérimenter l'ingénierie avant la première diffusion dans les classes de l'implémentation. Il s'agit de tester que la mise en œuvre effective dans des milieux variables amène bien à l'étude du savoir visé et aux comportements attendus des élèves, tels qu'ils ont été envisagés dans l'analyse *a priori*, et de comprendre les résistances possibles au dispositif. L'équipe doit identifier les conditions qui ont permis l'émergence de gestes professionnels en lien avec les enjeux du savoir. Il s'agit de repérer le « comment quoi », le « comment qui » et le « comment quand » qui fonctionnent pour l'avancée du temps didactique et à quelles conditions la reproductivité peut être envisagée.

S'inscrire dans une théorie, c'est avoir pour cadre de référence cette théorie, ici la TACD, afin de disposer de catégories pour l'analyse et ne pas dire tout et son contraire. La théorie est donc un modèle qui permet d'analyser ce qui se passe dans une classe. « Ce voir-comme » met en évidence des éléments qui resteraient sinon hors de portée de l'analyse. Il peut autoriser une attitude scientifique. Le chercheur, avec l'aide des concepts, construit « un voir-comme » qui n'est pas de l'ordre du ressenti ni de l'affectivité. Tout et son contraire ne peut être dit, mais une autre représentation aussi pourrait être formulée. L'analyse est contenue dans le cadre de la recherche sélectionnée à partir des concepts qui aident à élaborer la compréhension de modèles.

La position de chercheur-praticien favorise la création d'un « tout », d'une posture représentée par la pratique et la théorie. La séparation n'existe pas, la pratique et la théorie ont chacune leur propre durée. Ainsi, sous certains aspects, la pratique concerne le temps immédiat et la théorie travaille dans le long terme. La TACD permet de modéliser une pratique d'enseignement à des granularités différentes dans les sphères différentes pour parler l'enseignement-apprentissage. Pour le professeur, elle revivifie la pratique, les élèves explorent un savoir complexe dans leur propre durée et le chercheur modélise les actions de la pratique humaine pour en approfondir la théorie.

1. LA RECHERCHE ACE : LES ÉLÉMENTS GÉNÉRAUX

1.1 Une courte présentation de la recherche ACE

La progression Arithmétique et Compréhension à l'Élémentaire construit le nombre et le calcul au cours préparatoire à partir de quatre domaines intitulés « Calcul Mental », « Résolution de Problèmes », « Estimateur » et « Situations ». Chaque domaine possède une progression propre mais toutes se coordonnent. Dans cette thèse, comme nous l'avons vu, nous effectuons une centration sur le domaine « Situations ». L'objectif de cette section consiste dans la poursuite de l'élaboration d'un arrière-plan commun avec le lecteur pour l'analyse des productions d'élèves issus d'un cahier personnel nommé le « Journal du Nombre », et les courtes analyses produites n'ont pas d'autre ambition que de donner au lecteur des éléments de compréhension des parties empiriques ui vont suivre.
La vue d'ensemble des modules 0 à 11 permet de préciser l'organisation du domaine « Situations » sur l'année scolaire. Chaque domaine se divise en plusieurs modules. Nous décrivons les enjeux des modules avec les choix théoriques. Cette présentation s'inspire du document (progression-ACE) élaboré et rédigé par l'équipe de recherche Bretagne-Marseille[3]. Elle est composée de professionnels de l'enseignement, enseignants-chercheurs, doctorants, professeurs des écoles et de mathématiques et conseillers pédagogiques.
Lors de l'année 0, des séances-tests furent réalisées dans les classes d'étude. La classe d'étude s'apparente ainsi à un « laboratoire vivant ». L'objectif consiste à réaliser ce que la recherche a pensé avant la mise en œuvre dans les classes ordinaires, à une échelle plus importante. Il s'agit ainsi d'une forme particulière de recherche en ingénierie. Les classes d'étude sont au nombre de quatre dont l'enseignant est maître-formateur à service partagé (¾ en classe et ¼ en École Supérieure du Professorat et de l'Éducation (ESPÉ)).
Lors de l'année 1, la mise en œuvre effective a concerné environ une soixantaine de classes des quatre académies. L'année 2 marque un accroissement du nombre de classes « ACE » (de soixante environ à 120 environ).

1.2 Le domaine « situations » de la progression ACE : généralités

L'enseignement du nombre et du calcul au cours préparatoire se répartit sur l'ensemble de l'année scolaire. Trois domaines (Calcul Mental, Résolution de Problème et l'Estimateur) « s'ajustent » et complètent le domaine « Situations ». Le domaine « Situations » s'articule autour d'une situation que nous avons définie comme la situation de référence de type adidactique, pour la recherche ACE. L'objectif visé est la construction par les élèves d'un rapport au nombre « vrai », celui-ci étant bien entendu complexe. Le domaine « Situations » est organisé en cinquante-huit séances de quarante-cinq minutes. Ces 58 séances sont regroupées en onze modules. Les modules sont inégalement répartis selon les trimestres.
Lors du premier trimestre, nous remarquons une forte concentration du domaine « Situations » avec la mise en œuvre de 8 modules. Ensuite, le module 9 « Différence » va s'emboîter avec le domaine « Résolution de Problèmes » afin de travailler conjointement le sens et l'algorithme de la Différence/Soustraction. En fin d'année scolaire, les modules 10 et 11 du domaine « Situations » permettent un enrichissement des connaissances des écritures de « type algébrique ». Ils complètent alors activement le domaine « Calcul Mental ».
Le tableau ci-dessous est une vue générale du domaine « Situations » avec la répartition sur l'année scolaire, notamment il précise le nombre de séances par trimestre.

3 L'équipe Bretagne-Marseille à laquelle j'appartiens. Ma classe de C.P est aussi une des quatre classes d'étude. Le document progression est en ligne sur le site ACE à disposition des professeurs après identification.

Premier trimestre	Deuxième trimestre	Troisième trimestre
Les modules de 0 à 8	*Le module 9*	*Les modules 10 et 11*
Le module 0 : la situation « des trains » Les modules de 1 à 8 : la situation « Dé et doigts »	Le module 9 « la différence »	Le module 10 « le nombre inconnu » Le module 11 « les structures multiplicatives »
A quoi sert le nombre ? L'usage du langage pour dire et comparer avec les signes mathématiques. Le travail sur les petits nombres. Le train comme preuve mais également comme moyen de découvrir le nombre comme mémoire d'une quantité totale ou partielle. Les outils sémiotiques pour dire la réalité comme la boîte à calculer et la ligne graduée dans les situations additives.	La notion de soustraction perçue à la fois comme la recherche du complément et/ou du retrait. Les signes mathématiques pour comparer (réinvestissement). Le système numérique et les grands nombres. 0Grouper et dégrouper pour comparer et/ou calculer. Apprendre à formuler des critères pour valider ou invalider. Les outils sémiotiques dans la résolution de problèmes et les situations soustractives.	Les écritures de « type algébrique » des structures additives. Les structures multiplicatives et le mot « fois ». L'usage de la calculette. Les outils sémiotiques comme structure pour penser et écrire des énoncés de problèmes.
Nombre de séances : 32	Nombre de séances : 9	Nombre de séances : 17

Tableau n°1 : une vue générale du domaine « Situations »

Les apprentissages/enseignements de la progression ACE (domaine « Situations ») s'élaborent à partir de deux éléments théoriques, l'adidacticité et le milieu résistant matérialisé par les contraintes. Les hypothèses générales de travail sont les suivantes.

Premièrement, les situations proposées sont « adidactiques » (caractérisées comme situations à « fort taux d'adidacticité ») et évolutives. Nous pensons la création d'un espace-temps pour la rencontre-confrontation des élèves avec les procédures compositions et décompositions. Les élèves vont éprouver les notions mathématiques en jeu sous la nécessité de la situation, selon différentes contraintes. Ils rencontrent le nombre sous diverses désignations et sous différentes représentations. Ils interrogent ainsi le nombre et ses usages.

Ensuite, le domaine « Situations » accorde une priorité à la continuité de l'expérience mathématique. L'élève est confronté à un savoir complexe. Ce savoir est dépendant de la situation. La situation et le savoir sont en évolution permanente. Le savoir n'est pas simplifié. Il croît sous l'apport des situations et des contraintes. Celles-ci font « bouger » les limites des connaissances apprises. Si l'élève conçoit le jeu, c'est-à-dire l'enjeu et le gain *immédiats*, c'est au travers de l'adidacticité que l'élève explore profondément le savoir dans de la situation.

La progression/programmation ACE n'oriente pas l'élève de l'élément le plus simple vers le plus complexe. Le découpage des savoirs n'est pas un découpage classique des connaissances. Dès le début, l'élève est confronté au savoir complexe, qu'il soit « avancé » ou « moins avancé ». Nous pensons que la complexité est un moyen de permettre la compréhension. Celle-ci est favorisée par des échanges de points de vue, la classe entre en débat. L'hypothèse de travail sous-jacente est que comprendre c'est agir sur le monde. Cela semble beaucoup plus fort que des actions comme répéter

ou appliquer.
Précisons maintenant les contenus de la progression/programmation ACE.

1.3 Les contenus des situations proposées avec le domaine « situations »

1.3.1 Introduction

La progression/programmation ACE propose aux élèves et aux professeurs des situations dans lesquelles le nombre est étudié sous diverses modalités. L'étude du nombre commence par une phase orale avant le codage par l'écrit. L'usage de la comparaison est toujours privilégié.
Par exemple, l'élève dit : « j'annonce cinq » dans le jeu « dé et doigts » (jeu des annonces). Puis, le nombre est montré à l'aide des deux mains. Nous pourrions décrire les hypothèses de travail en soutenant que le nombre est montré comme dans deux espaces différents, ou deux ensembles disjoints. C'est la contrainte apportée par le contrat, la nécessité du respect de la règle du jeu. Elle impose la représentation du nombre (l'annonce) avec les deux mains. Le mot-nombre est ensuite comparé à la constellation de points du lancer de dé et à la quantité de doigts matérialisée, comme nous venons de le dire, par deux sous-ensembles, les deux mains. L'élève se trouve confronté à différentes représentations du nombre. Par exemple, l'élève compare 6 points avec 5 doigts et encore 1 doigt et le mot-nombre six. Ces représentations signifient, désignent le même nombre, ont la même dénotation (Frege, 1974). Dans un autre exemple, l'élève peut comparer également le mot-nombre six avec cinq points mais aussi « deux doigts et encore 3 doigts ». C'est différent. Les trois représentations ne désignent pas le même nombre. Le nombre 5 est plus petit, est différent ou n'est pas égal à 6. Le nombre 5 est avant le nombre 6.
La constellation de points peut alors être perçue comme un ensemble d'unités de un. Cette collection a une particularité, elle est organisée. L'élève peut commencer à mémoriser des combinaisons de nombres grâce à l'agencement/orientation des points dans l'espace. La forme carrée de la face du dé se prête à une mise en mémoire. Ces représentations deviennent peu à peu des images (mentales) pour l'élaboration du nombre et du calcul. L'ajout ou le retrait de point dans l'espace de la face du dé et son organisation pourraient être une aide à la mémorisation. Par exemple, la constellation du nombre quatre est souvent décrite comme la constellation dont l'absence du point central est remarquée. La constellation du nombre cinq, quant à elle, est souvent désignée par un point dans chaque « coin » en plus du point central.
Le comptage des éléments (comptage-numérotage (Brissiaud, 2007)) un par un n'est pas encouragé. Il ne s'agit pas de rendre les élèves performants dans la récitation de la comptine numérique. L'objectif est plus ambitieux. Le choix de la recherche ACE est de favoriser l'entrée des élèves dans la numération par les stratégies de composition et décomposition.
La seconde phase du jeu des annonces « dé et doigts » est l'entrée dans la symbolisation. L'élève est confronté à l'écriture du nombre usuelle/conventionnelle. L'élève écrit le nombre mais également les relations entre les objets et les ensembles. Comme nous le voyons, le rapport au nombre construit par l'élève est complexe. L'hypothèse est que l'élève interroge le nombre mais il fait davantage encore. Il interroge également le système numérique. Comme nous tenterons de le monter dans les analyses empiriques, les situations ne font l'économie ni des relations ni des concepts. Le nombre ne se réduit ni à une représentation unique ni à un usage limité comme avec le comptage-numérotage.

1.3.2 Les contenus des différents modules

Le module 0

Il s'agit de la situation des trains, première situation du domaine « Situations ». L'élève est confronté aux premières décompositions additives sur les tout-petits nombres à partir de la construction de trains. Décrivons sommairement la situation.

Un élève construit un train avec des cubes de quatre couleurs (rouge, jaune, bleu et vert). A la suite de cette tâche, il devient un élève-émetteur qui code un message pour un élève-récepteur. Ce dernier doit élaborer *le même train*. L'élève-récepteur n'aura pas accès au modèle du train construit. Ainsi, l'élève-émetteur doit coder, écrire un message dont le destinataire est l'élève-récepteur. Le code est tout d'abord un simple dessin. L'élève produit juste le dessin du train. C'est la contrainte du rejet du dessin (phase 2) qui obligera l'élève-émetteur à utiliser le nombre comme la mémoire d'une quantité. Maintenant, le nombre désigne la quantité. Il peut représenter le nombre total de cubes (le nombre-tout) ou/et le nombre de cubes d'une couleur (le nombre-partie). L'élève-récepteur, lors des déplacements limités, comprendra à son tour *à quoi sert* le nombre dans cette situation.

Cette situation permet de valider les propositions par la comparaison de trains. Elle deviendra un moyen de validation et de preuve pour le « jeu des annonces » sur lequel se greffe la *référence commune* à tous les agents. Le langage devra se modifier, du langage ordinaire au langage mathématique en appui sur les expériences mathématiques réalisées.

Les modules 1 à 4

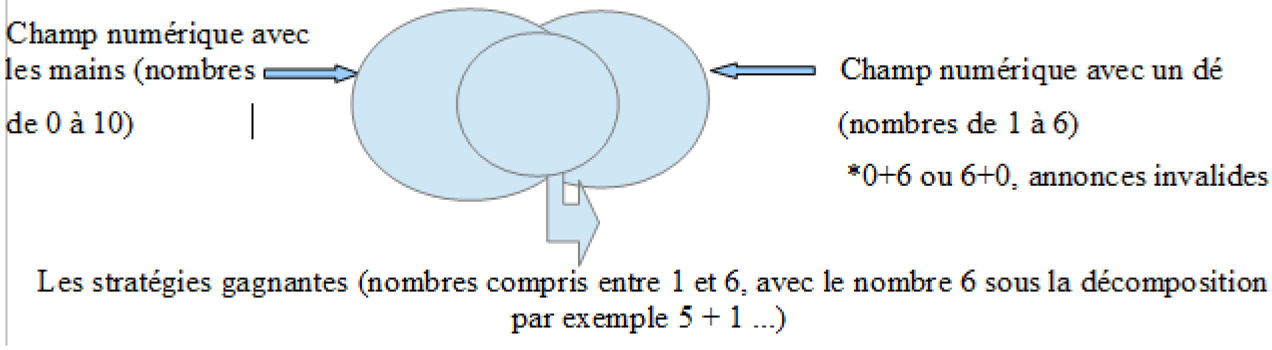
La situation « dé et doigts » nommée aussi la situation du « jeu des annonces » est une situation répétitive et évolutive. Répétitive puisqu'elle démarre dès la deuxième semaine de la rentrée des classes et perdure sur l'ensemble du premier trimestre. Évolutive par les contraintes de jeu qui rendent le milieu résistant. Les contraintes se modifient au cours des différents modules.

Le champ numérique des annonces dépend du nombre de dés. Avec un seul dé (modules 0 à 4), seuls les premiers nombres sont concernés. Les faces du dé représentent les nombres par des constellations de points de 1 à 6. Les doigts peuvent réaliser des annonces de 0 à 10. Toutes les annonces ne sont donc pas vraies. Le milieu résiste par les contraintes. L'élève peut annoncer le nombre dix. Il montre même dix sur les deux mains. Pourtant l'annonce est perdante. Pourquoi ? Les deux espaces numériques ne se superposent pas. Quelles sont les conséquences ? Les deux ensembles, l'ensemble du champ numérique possible des annonces réalisées avec les deux mains et l'ensemble des constellations du dé ont une intersection commune. Les deux ensembles ont aussi chacun une « zone indépendante ».

La contrainte des deux mains associées au dé délimite un espace dans lequel des annonces ne sont pas toujours vraies. Elles sont réalisables avec les mains mais elles sont perdantes en fonction du milieu constitué par le dé et inversement le nombre 6 (nombre maximum du dé) peut être représenté avec les deux mains mais sous certaines conditions.

L'annonce 6 + 0 est une annonce perdante même si le nombre 6 est compris dans le champ numérique défini par le dé. Le dé, répétons-le, peut faire 6. L'élève invalide l'annonce 6 + 0 ou 0 + 6 avec l'argument qu'il ne possède pas 6 doigts sur une *même* main. De même, l'annonce 0 + 0 peut être montrée avec les deux mains. Mais elle est une annonce perdante. Le dé n'a pas de zéro.

figure n°1 « dé et doigts » (un dé)



Le nombre de termes d'une annonce ou encore les conditions d'une annonce gagnante vont varier au cours de la progression. Selon le module, l'annonce peut être gagnante si et seulement si elle est égale, supérieure ou inférieure au lancer. Le lancer peut être réalisé avec un ou deux dés (modules suivants) et l'annonce en deux termes (les deux mains) ou en trois termes (une équipe de trois élèves avec une main dans le dos). L'hypothèse de travail est que les élèves vont construire peu à peu des expériences sur le nombre. Une écriture additive n'est pas seulement une décomposition en deux termes. Elle n'est pas forcément l'ajout de deux collections. L'élève explore et expérimente dans un milieu mouvant, mais pour lequel existe chaque fois une référence (les mains, le dé, etc.).

Les modules de 1 à 4 situent l'installation du jeu et la règle. La constitution des équipes se compose d'un lanceur-arbitre et de trois ou quatre élèves-annonceurs. L'élève découvre le matériel, un dé ordinaire avec 6 faces et des constellations de points. Le professeur énonce la règle de jeu. Elle consiste à choisir un nombre, dire ce nombre à haute-voix et le montrer avec les deux mains. Les règles stratégiques, celles qui permettent de gagner au jeu, quant à elles, ne sont pas dévoilées par le professeur. Elles seront découvertes en situation sous la nécessité des contraintes du jeu. Par exemple, l'élève s'interroge sur la possibilité de gagner souvent. Peut-il réaliser une annonce « grande » avec les dix doigts ou très « petite » avec le zéro. Dans ce cas, comment peut-il représenter le nombre zéro ?

Le module 2 vise l'abandon de l'usage des doigts pour privilégier l'écriture symbolique, dans la même situation de comparaison. L'élève travaille toujours avec les petits nombres. L'annonce, à l'oral, pour le nombre 5 sous la forme 2 et encore 3 sera progressivement notée 2 et 3 puis 2 + 3. De la comparaison de sommes naîtra l'usage de nouveaux signes mathématiques pour expliciter le gain. L'annonce est gagnante parce qu'elle est égale au lancer du dé ou différente. Cela se traduit par les signes « = » et « ≠ »

Les modules écrits sont constitués par des parties fictives, qui sont une modalité de travail collective. Les élèves sont ainsi confrontés à un lancer de dé et à un tirage « fictifs » qu'il s'agit de comparer par écrit. Cela permet à la classe de (re)-découvrir des contraintes spécifiques liées à la situation et au savoir, que le seul jeu effectif dans les modules oraux n'a pas permis de rencontrer. Pendant les ateliers et lors de la construction d'expériences mathématiques en équipe, les élèves ont rencontré certaines connaissances. Elles sont de nouveau travaillées et étudiées en classe entière. L'hypothèse sous-jacente à cette partie du dispositif est que la mise à distance de l'expérience permet l'équité mais également une étude en profondeur du savoir visé. Ce temps est favorable à l'*institutionnalisation* des connaissances découvertes lors des situations. Le jeu, s'il permet la découverte des savoirs visés, est accompagné de parties fictives.

La volonté de la recherche ACE est ainsi de travailler à la fois *« le comment et le pourquoi ».*

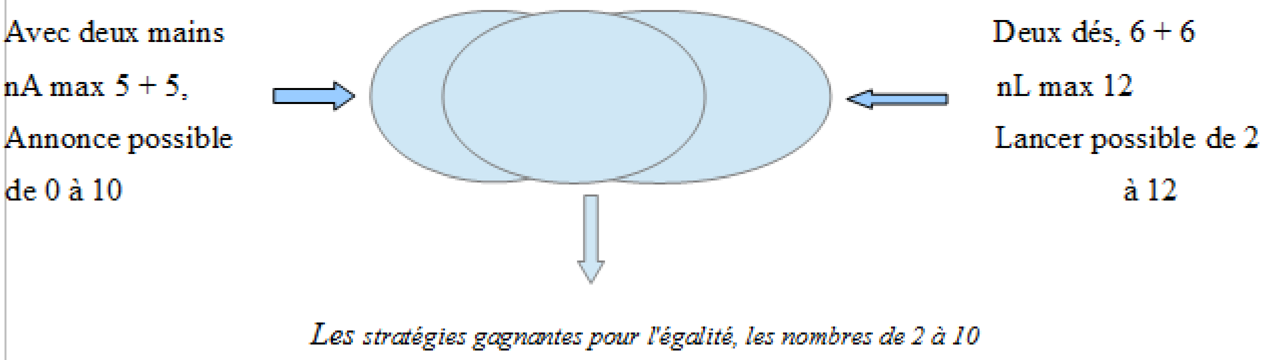
L''algorithme n'est pas apporté avant la nécessité et travaillé comme une « recette ».

Les modules 3 et 4 sont l'occasion de dire et montrer des annonces à 3 mains, puis de passer à l'écrit. L'élève produit une écriture additive en 3 termes avec l'usage de nouveaux signes mathématiques « < » et « > ». Les signes mathématiques écrivent et signent la certitude mathématique. Produire une annonce à trois termes implique des stratégies de réajustement et une certaine entente au sein de l'équipe. Par exemple, imaginons une équipe de trois élèves. Elle annonce le nombre *cinq*. Les élèves n'ont pas discuté la décomposition de cinq. Ils n'ont pas parlé de comment faire cinq avec trois mains. Les deux premiers joueurs posent deux doigts sur la table et le troisième s'apprête à faire de même. Nous pouvons même penser qu'il pose les deux doigts sur la table. Puis l'élève se rétracte à la vue des six doigts posés et/ou sous les injonctions de l'équipe. C'est trop. Il lui reste à replier un doigt. L'idée est que l'ajustement permet de mettre en adéquation le mot-nombre prononcé collectivement et la décomposition montrée collectivement avec les doigts.

Les modules 5 à 8 (hormis le module 7)

Ces modules mettent en œuvre la comparaison des écritures additives avec l'augmentation du champ numérique. L'élève est de nouveau confronté à deux espaces numériques dont les limites ne se superposent toujours pas complètement. Le champ numérique « couvert » par deux dés comprend les nombres de 2 jusqu'à 12. Quant à celui des doigts, il concerne les nombres entre 0 et 10. Nous avons comme précédemment deux encadrements du système numérique.

figure n°2 « dés et doigts » (deux dés)



Le module 7

Il s'agit d'une première approche du système décimal (groupement par dix) à partir d'une longue écriture additive. Elle représente l'annonce d'une classe entière. Afin de déterminer à quel nombre est équivalent l'écriture additive, l'élève est amené à tester différents groupements.

La situation provoque une augmentation importante des valeurs numériques par le nombre de mains c'est-à-dire les nombres mis en jeu. La grande addition de départ est la suivante, 14+8+4+5+3+5+9+13+11. Elle contient 9 termes. Le changement de règles amène l'élève à produire de nouvelles écritures comme moyen de désignation d'un nombre. Les nouvelles écritures sont de forme additive. Le groupement n'est ni désigné ni imposé. Toutes les tentatives d'écriture provoquent une réduction de termes. Cette situation est l'occasion d'user des connaissances apprises lors de la situation des annonces (« dé et doigts »), et de mettre à l'épreuve les différents répertoires additifs (les doubles, les presque-doubles et les compléments avec le repère des nombres 5 et 10). L'élève va grouper mais également dégrouper afin de proposer une écriture additive dont tous les groupes seront identiques. Ce sont des essais dont l'enjeu consiste à amener l'élève vers l'usage du groupement par dix. Il s'agit de pouvoir désigner et représenter le nombre sous la forme 5 d et 3 u (5 dizaines et 3 unités) par exemple.

Le module 9

Ce module concerne la notion de « différence » et le signe « - ». La soustraction n'exige pas d'être définie comme une opération contraire de l'addition. Elle a une signification propre. Les mathématiciens considèrent à juste titre la soustraction et l'addition comme des opérations mathématiques étroitement parentes l'une de l'autre (Vergnaud, 1982). Avec la comparaison, les élèves vont, dans un premier temps, rechercher la différence/écart entre deux nombres. La recherche de la différence pourra se résoudre par la recherche du complément et/ou du retrait, *après la recherche de ce qui est pareil*. Tout dépend de la taille des nombres en jeu mais dans un premier temps, l'élève explore la notion de différence. De plus, les élèves disposent de systèmes sémiotiques, d'outils pour penser le problème, que nous allons décrire en substance ci-dessous Le module 9 est en lien étroit avec le module X du domaine Rdp (domaine « Résolution de problèmes ») dont la tâche consiste à étudier l'algorithme de la soustraction. Ces deux domaines se coordonnent afin de mettre à l'étude la compréhension et les techniques de la résolution de problèmes. La compréhension et le « sens » du signe « - » se construisent avec le signe « + ».Un point essentiel reste à souligner. L'écart définit par un nombre peut correspondre à une variété d'opérations. Par exemple un écart de 3 peut correspondre à la recherche de la différence entre 9-6, 12-9,100-97. Un autre domaine intervient de manière plus diffuse. Il s'agit du Domaine « Estimateur » dont l'objectif est une connaissance approfondie des repères topologiques.

Les modules 10 et 11

Avec la situation du nombre inconnu (module 10), l'élève consolide les stratégies mises en œuvre précédemment avec la recherche du complément.
La réitération de nombres identiques dans un tirage renforce les connaissances de « type algébrique » des structures additives. L'élève va utiliser les savoirs construits sur les petits nombres. Nous souhaitons qu'il transfère ces connaissances sur les grands nombres. Le module suivant (module 11) s'emboîte sur le précédent. Il amène l'étude des structures multiplicatives à partir la comparaison d'écritures additives à termes identiques. La situation introduit l'usage de l'expression « fois » et du rectangle comme représentation des structures multiplicatives. Il semble se réaliser un ajustement particulier entre les domaines « Situations » et « Calcul Mental ».

1.3.3 Les systèmes sémiotiques

La progression ACE fait l'hypothèse que les outils sémiotiques sont une source importante de questionnement. Ce questionnement porte, à la fois, sur le nombre-problème et la structure du problème. Les systèmes sémiotiques sont une représentation de la réalité et potentiellement une puissance d'agir.

Nous envisageons ci-dessous deux outils, « la boîte à calculer » et « la ligne graduée » mais il existe d'autres systèmes sémiotiques comme les trains-nombres, les nombres carrés ou encore la balance numérique. Ces outils sémiotiques ont l'avantage de créer des relations entre les nombres. Ils rendent « lisibles » certaines propriétés pour résoudre le problème.

L'usage de ces outils n'est pas « figé ». Ils sont pensés en étroite relation avec la progression. Ils évoluent ainsi au rythme des situations. Par exemple, la ligne graduée pourvue de chaque graduation pour le travail spécifique sur les petits nombres et l'élaboration des repères des nombres 5 et 10 n'a *plus* de graduation pour penser et raisonner avec les grands nombres. La ligne graduée sert à représenter les nombres, à organiser les données (ce que l'élève connaît, ce qu'il ne connaît pas) et l'enjeu de la recherche (quel est le problème). Ces systèmes sont aussi présents dans le domaine « Résolution de problème » et le domaine « Estimateur ». Leur fonction est donc de représenter, de prouver mais également d'aider à penser, à rechercher et bien sûr à discuter pour démontrer.

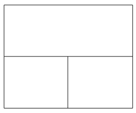
La boîte à calculer et la ligne dans la progression ACE

Les deux objets sémiotiques « boîte à calculer » et « ligne graduée » sont utilisés très tôt dans la progression ACE, dès la phase de l'entrée dans la symbolisation. Comme nous l'avons évoqué, ce sont des outils, des structures pour penser les problèmes et un schéma pour modéliser la réalité. Ils fonctionnent avec les situations de la progression et notamment avec le jeu des annonces « Dé et doigts ». Commençons par décrire chaque objet sémiotique.

La boîte à calculer

La boîte à calculer est de forme carrée ou rectangulaire. Sa forme est légèrement variable puisque celle-ci est en rapport avec la décomposition du nombre, nous allons y revenir. Il s'agit de percevoir deux réalités d'un même nombre. La boîte donne donc à voir en même temps, la globalité du nombre et une décomposition possible de celui-ci.
La boîte est formée de deux étages avec deux représentations possibles qui entretiennent des relations mais elles ne les cachent pas. La première représentation est le nombre-tout comme évoqué précédemment. La seconde représentation est une représentation en deux parties du nombre perçu comme un tout. Nous pourrions dire que la boîte aide à différencier la nature des nombres en les reliant aux statuts de nombres-tout et de nombres-parties, désignation d'un même nombre. Il s'agit encore une fois du même nombre, regardé d'un point de vue différent. L'étage inférieur, dans les premiers modules, se divise en deux parties ou deux cases. Il se modifiera comme nous le verrons ultérieurement. Mais cette première représentation est très importante parce qu'elle s'appuie sur le jeu des annonces. Elle fait sens. La structure, nous le voyons permet de penser la situation du jeu des annonces. Elle procure un modèle pour continuer à résoudre des problèmes mathématiques en sortant de la situation initiale ou encore de permettre des transferts de connaissances dans des situations différentes.
Dans le jeu des annonces, l'élève doit tout d'abord réfléchir à un nombre, dire le nombre et le montrer avec les deux mains. Nous retrouvons la structure de la boîte. Dire le nombre correspond à l'étage supérieur (voir schéma) et montrer le nombre avec les deux mains correspond à l'étage inférieur (voir schéma).
Nous montrons une boîte à calculer.

La boîte à calculer : premier modèle	Un exemple d'annonce dans la première phase du jeu



Je pense au nombre 6. J'annonce 6 que je peux représenter à l'aide des deux mains comme 5 et 1, 4 et 2, 3 et 3, 2 et 4 et enfin 5 et 1.
La décomposition du nombre 6 écrit 6 et 0 serait possible dans une autre situation. Cette écriture est invalidée ici puisqu'une main comprend 5 doigts. Le groupement par 5 est un repère important dans la construction de la numération comme nous l'avons évoqué.

Nous précisons quelque peu le passage d'une annonce orale et matérialisée par une collections de doigts répartie en deux groupes vers l'usage de la boîte et la symbolisation. Alors que la boîte n'est pas encore présentée aux élèves, ils vont devoir compléter une fiche de jeu avec leurs annonces. Sur la fiche, l'élève doit indiquer l'annonce, le nombre du lancer de dé et le gain ou la perte. Dans cette phase, l'élève gagne si et seulement si l'annonce est égale au lancer du dé. Dans les travaux des élèves, nous remarquons différents moyens de coder cette annonce. Nous évoquons ce fait parce que nous pensons que l'appropriation de la boîte dépend des relations déjà-là sur le nombre à disposition de l'élève.
Sur la fiche de jeu, nous observons donc des nombres écrits sans aucune séparation où la lisibilité et/ou la validité de l'annonce sont contestables car des nombres écrits par l'élève et rapprochés forment un autre nombre. Par exemple, l'annonce 2 et 3 devient 23. Il existe des productions d'élèves avec des séparateurs de nombres représentés par un petit trait horizontal ou vertical comme dans l'exemple suivant 2-3 ou 2 |3. Enfin, nous constatons la présence du signe mathématique « + » dans quelques travaux d'élèves. Même si le mot « plus » est couramment utilisé dans les jeux de langage, l'usage du signe « + » et son écriture ne sont pas systématisés. A l'oral dans les phases de jeux, les annonces se disent « 2 et 3 », « 2 et encore 3 » mais aussi « 2 plus 3 ». Sur les fiches, quelques écritures comprennent également le signe « = » avec des annonces du type 2 + 3 = 5 ou 5 = 2 + 3.
Revenons à la boîte. Dans celle-ci, *nul besoin de signe mathématique*. C'est un atout pour un élève de cours préparatoire. L'élève peut donc écrire et proposer des calculs additifs sans la gestion de signes mathématiques. Il écrit des nombres et rien d'autre. La fiche de jeu des annonces des premiers modules est peut-être à repenser afin d'utiliser davantage les relations des nombres dans la boîte sans les signes mathématiques. Comme l'élève écrit des annonces en ligne sans signe, la boîte lui fournit un cadre dans lequel, sans le recours aux mains, il peut continuer à penser le nombre dans sa globalité et sous une forme additive.
Pourtant, des élèves cherchent à écrire le signe « + ». Ils réclament une case de plus ! Finalement, l'étage inférieur qui représente le nombre en deux partie montre en quelque sorte la relation du signe « + » c'est-à-dire la relation des nombres-parties avec le nombre-tout. Beaucoup d'élèves ont accordé une valeur d'union à ce trait vertical. Pourtant, le trait vertical a une autre fonction, celle de séparateur des nombres lors des dictées de nombres en calcul mental sur l'ardoise. La question des signes dans la boîte va à nouveau être débattue avec le signe « - » et le module 9 « Différence/Soustraction ».

Des boîtes erronées

Le nombre-tout n'est pas la représentation écrite en biparties. C'est le début de l'année et les élèves reprennent appui sur les doigts pour comprendre pourquoi cette boîte par exemple 2 et 3, c'est 6, ne peut être validée. La boîte est juste ou fausse mais l'élève ne peut s'auto-évaluer. C'est une limite de l'outil.
Dans la classe, je parle de boîtes à l'envers. La formulation est trompeuse parce que la structure de la boîte n'a jamais changé. L'étage ou la case du nombre-tout est toujours en haut et les parties ou

les deux cases toujours en bas. Ce sont les nombres qui ont parfois bougé sous les contraintes de la situation mais pas la structure. La seule variable de la boîte est le nombre de cases pour l'étage inférieur qui code la décomposition en 2, 3, 4 termes ou plus si nécessaire.
Les nombres ont bougé sous des tensions. Envisager le nombre-tout d'abord puis le représenter sous la forme d'une écriture additive amène bien évidemment à voir aussi les nombres-parties comme la représentation du nombre-tout. Il est alors très tentant pour vérifier, accréditer certains calculs, de « retourner la boîte ». L'étage avec les cases c'est-à-dire les nombres-parties serait en haut et les calculs produiraient le nombre-tout, c'est-à-dire la case non segmentée en bas. Mais ce serait oublier que cette boite à calculer est une structure pour penser les problèmes et non un arbre à calculer.
Imaginons que nous développions cette idée d'arbre à calculer présente dans certains fichiers de mathématiques. Il s'agit pour les élèves d'être performants avec une méthode (l'arbre à calcul) puisque l'objectif est la réussite de tous les élèves dans le calcul terminal. La garantie du calcul terminal est basée sur des étapes intermédiaires guidées et progressives des différents calculs partiels. Mais les élèves moins avancés éprouvent certaines difficultés à résoudre ces calculs qui demandent une stratégie. Le choix le plus judicieux n'est pas toujours de sélectionner les nombres les plus proches géographiquement (dans l'écriture) pour les calculs « utiles ».
Dans un premier temps, la boîte à calculer pourrait sembler beaucoup moins performante. Elle n'est pas une procédure pour résoudre des problèmes et obtenir un résultat juste. Regardons ce que devient la boîte quelques modules plus loin.

La boîte et le module 9 « Différence »

La boîte n'a pas été retournée et ne le sera pas. Elle devient très utile pour prouver la différence comme par exemple 9 – 5 = 4. Elle est alors utilisée comme rattachée à la situation du jeu des annonces. « 9 moins 4 c'est 5 parce que 5 plus 4 c'est 9 ».
Des élèves cherchent à écrire la différence dans la boîte. Ils demandent une case de plus, un emplacement pour noter le signe « - ». Il y a une réponse négative du professeur, pas de signe mathématique dans la boîte. Une élève énonce que le trait vertical entre les deux cases est le signe « + ». Maintenant, dit-elle nous pourrions dire que c'est le signe « moins ». Elle change la signification du trait parce qu'elle souhaite se servir de la boîte pour écrire des différences. La proposition n'est pas retenue car comment pourrions-nous alors différencier les boîtes ?
C'est la période des nombres qui bougent, des nombres qui changent de place. La recherche de la différence donne un statut à ce nombre qui n'est pas le nombre-tout. Ce dernier était reconnu comme le nombre le plus grand parmi les nombres présents dans la boîte. Il avait en quelque sorte une place de « leader ». La différence accorde une place particulière à un nombre qui n'est pas le nombre-tout mais un nombre-partie. Dans les productions de certains élèves, il prend place alors parfois à l'étage supérieur et le nombre-tout descend à l'étage inférieur.

Voici un exemple issu du module 9

L'élève utilise la boîte pour écrire 9 – 5 = 4

4	
9	5

Le groupe invalide rapidement cette boîte avec le motif que 9 + 5 c'est 14. Certains diront : « il manque un 1 (pour la dizaine) ».

4	
5	9

Autre tentative qui ne règle rien.

A cette même période, les élèves déclarent avoir une autre boite pour prouver la différence. En fait, il s'agit de deux boîtes dont la différence réside dans l'écriture additive, en fait dans la commutativité. Par exemple pour le nombre 9, il y a la boîte 5 + 4 mais aussi la boîte 4 + 5. Ces

deux écritures donnent deux boîtes. Elles vont vivre un certain temps dans la classe sans que la question d'une boîte qui dise et parle le signe « - » ne soit élucidée. Elles sont toutefois extrêmement utiles puisqu'elles permettent de prouver la différence par l'opération inverse.
De deux boîtes, il faut en laisser une ! Le professeur intervient et à partir de boîtes réalisées au tableau par les élèves, il demande si la seconde boîte n'est pas visible dans la première. Le sens de lecture dominant de la gauche vers la droite va se compléter par celui de la gauche vers la droite. Une boîte suffit pour dire la commutativité, cette relation importante entre les nombres. Lors de l'année 2, une boîte dira quatre opérations comme 4 + 5 = 9, 5 + 4 = 9, 9 – 5 = 4 et 9 – 4 = 5.

Le module Résolution de Problèmes (Rdp) et la recherche de petits problèmes de complément ou de différence associé aux jeux de langage adéquats vont compléter l'usage de la boîte. Que nous apporte la lecture de haut en bas ? La recherche de la différence ou du complément est matérialisée par un point d'interrogation. Ce point d'interrogation rend visible une relation entre deux nombres, non plus côte à côte mais inscrits à des étages différents. La relation n'est plus la même. Même si l'élève tente l'écriture du nombre-tout (9 + 5 = 14) dans la case du bas, il ne peut prendre place dans la boîte. Pourquoi ? Parmi les trois nombres, ce nombre reste le nombre supérieur. Le nombre le plus grand ne peut être dans une petite case.

Un exemple de recherche avec le module Rdp	Pas de signe « - » mais ….
9 5	?	La boîte ne change pas mais la lecture se modifie pour faire apparaître une autre relation entre les nombres. Il s'agit de comparer 2 nombres 9 et 5. Ce problème peut se résoudre de 2 manières.
9 – 5 = 4 5 + 4 = 9 9 (5 + 4) – 5, la différence est de 4	La zone de calcul prévue sur la feuille nous apprend quel est le procédé sélectionné par l'élève. Cette même boîte nous montre également une autre relation : 9 – 4 = 5

Ce sont les élèves plus avancés qui se sont emparés des nouvelles relations. On note l'apparition de flèches au tableau et sur le chahier personnel de l'élève, le Journal du Nombre, dont nous allons étudier la mise en œuvre ci-dessous. Les élèves moins avancés utilisent encore la boîte comme une preuve mais l'exploration se poursuit. Un des enjeux sera la diffusion pour tous. Tous les élèves sont entrés dans la boîte et dans les calculs avec « je vois un nombre dans un nombre » (qui explicite le fait qu'on voit par exemple 4 dans 5 lorsqu'on écrit 5 = 4 + 1) pour calculer la différence. Puis ils ont investi un second outil sémiotique, la ligne graduée.

La ligne graduée

La ligne graduée est une ligne sur laquelle chaque graduation de un apparaît avec des repères de 5 en 5 renforcés. Sa force, par rapport à la boîte, est de permettre à l'élève le contrôle de son action. L'élève a le moyen de vérifier la validité de la réponse proposée au problème.
Le premier usage de la ligne graduée montrait un comptage des graduations. « Je pense au nombre 6. J'annonce 4 et 2 parce que c'est 6 ». L'élève faisait un, deux, trois, quatre … un bond de quatre puis un, deux ...et un bond de deux pour prouver que le bond de quatre et le bond de deux représentaient bien le nombre 6.
Lors de la seconde étape, des élèves ont proposé de ne pas compter toutes les graduations : « Parce que 4, c'est un de moins que le nombre 5 donc tu t'arrêtes juste avant 5. Ensuite, tu fais un bond de

2, tu dépasses 5 et tu t'arrêtes juste après 5 ». Que font ces élèves ? Ils utilisent les relations apprises dans le jeu des annonces. Nous voulons dire que la contrainte de montrer le nombre avec les deux mains sur des petits nombres sert à construire ce réseau de relations entre les tous premiers nombres. L'ajustement réalisé sur les doigts inscrit peut-être dans la mémoire des corps ses relations si précieuses pour calculer.

L'estimation et le calcul

La ligne avec les seuls repères de 5 en 5 perfectionne l'estimation mais aussi le calcul. Elle permet un travail sur un champ numérique plus important. La consolidation du repère du 5 s'est aussi renforcé. Il est particulièrement important dans l'élaboration du réseau des relations numériques que la recherche tente de faire émerger puisqu'il contribue à l'emboîtement des connaissances dans les différents modules. L'usage de la ligne est travaillé avec le logiciel Estimateur. Tout ceci se combine pour une mémorisation de repères topologiques efficace. Ainsi l'étude du segment numérique aide à penser les relations entre les nombres. Un nombre n'est pas seulement le suivi ou le suivant (d'un nombre). La représentation des relations n'est pas figée parce qu'elle supporte des ajouts et/ou des retraits. L'élève n'apprend donc pas à se déplacer linéairement sur la ligne graduée mais il s'y oriente à partir de points d'ancrage. Ceux-ci sont le repère du nombre 5 et les graduations de 10 en 10 avec les répertoires mémorisés.
« Voir un nombre dans un nombre » utilisé pour le calcul est transféré dans l'usage de la ligne graduée. Cela permet de commencer le tracé de bond « estimé » pour penser la structure du problème. Par exemple, pour le problème 4 + 5, l'élève fera un bond de 4. Celui-ci ne va pas jusqu'à la graduation 5. Il continue à partir du premier bond réalisé pour tracer le second bond. Comment faire ce bond de 5 seulement avec les repères de 5 en 5 ? Le bond partira du bond précédent (4) et dépassera le repère du 5. Où va-t-il s'arrêter ? Il faut ne pas atteindre la prochaine graduation qui chiffre 10. Si le bond s'arrête un peu avant 10, il sera estimé comme juste.

La ligne graduée sans aucune graduation

Nous sommes toujours dans le module 9 »Différence/Soustraction ». Maintenant, les élèves vont tracer à main levée une ligne. Au début, ils indiquent le zéro, c'est-à-dire l'origine pour s'orienter. Puis après un usage fréquente, nous nous apercevons que le zéro n'est même plus inscrit sur la ligne. Nous revenons au nombre-tout, le nombre le plus grand. Celui-ci est donc représenté par un bond. A l'intérieur de ce dernier, les élèves écrivent le nombre. La « taille » n'a plus nécessité d'être représentative puisque le nombre est inscrit dans le bond. A l'intérieur de celui-ci, deux procédures sont utilisées. L'élève trace le premier bond de la décomposition soit à partir de l'origine soit à partir de l'extrémité du bond représentant le nombre-tout.
Comme nous l'avons montré les outils sémiotiques évoluent avec les situations.

LE JOURNAL DU NOMBRE

Introduction Générale

La partie Journal du Nombre se compose de quatre chapitres que nous présentons rapidement, avant de décrire plus précisément chaque chapitre et son contenu.
Le chapitre 1 explicite l'origine du Journal du Nombre avec les fondements et le modèle prototypique du Journal du Nombre, le journal des fractions (Sensevy, 1996, 1998) dans une classe de cours élémentaire.
Le chapitre 2 centre les enjeux de la recherche ACE par l'étude d'un domaine particulier, le domaine *Situations* et l'étude des six premiers modules et d'un module introductif, le module 0. Il s'agit de présenter le « Journal du Nombre » en appui sur des travaux d'élèves. Pour cela, le chercheur-professeur prélève des indices (des éléments signifiants) dans les productions d'élèves pour élaborer et partager avec le lecteur un « voir comme » nécessaire aux futures analyses.
Le chapitre 3 explicite et développe une notion essentielle « l'incitation productive collective ». Il propose une définition théorique de l'incitation et formule plusieurs hypothèses. Ces dernières (les hypothèses) sont étudiées à nouveau dans la mise à l'épreuve de l'analyse des séances (à partir des extraits de transcriptions).
Le chapitre 4 est un travail spécifique sur les énoncés de problèmes. Il a été réalisé lors de deux années scolaires de 2012 à 2014 (année 1 et année 2 de la recherche ACE). Il montre des productions où l'élève est le producteur de ses propres énoncés.

Evoquons maintenant la structure générale et spécifique de la partie « Journal du Nombre ». Le chapitre 1 raconte l'historicité du Journal du Nombre à partir des travaux menés dans la classe de Sensevy. Il a une structure différente des trois autres chapitres puisqu'il est un compte-rendu de l'expérimentation réalisée sur le journal des fractions. Ensuite, chaque chapitre est construit suivant une structure récurrente que nous pourrions appeler aussi spiralaire. Elle tourne autour de trois éléments permanents, toujours présents à l'intérieur de chaque chapitre. Ils sont observés et/ou analysés à l'aide de certaines catégories de la TACD. Les trois éléments permanents de la structure spiralaire sont le travail sur les productions d'élèves, l'incitation productive collective et l'anticipation (étudiée à nouveau cf. ?). Nous examinons tout d'abord le pourquoi de la permanence de ces trois éléments. Les productions des élèves sont nombreuses et permettent au chercheur-professeur la constitution d'un recueil d'indices dont l'enjeu est, à la fois, l'élaboration d'un « voir comme » commun aux lecteurs de la thèse et à l'auteur mais aussi un moyen de « parler sur pièces » d'un morceau de pratique. Les deux autres éléments permanents sont « l'incitation productive collective » et « l'anticipation », deux notions essentielles liées à l'usage et la pratique du Journal du Nombre dans la classe de cours préparatoire à Quimper. En fait, elles caractérisent la pratique spécifique de l'enseignante de la classe qui est le chercheur-professeur dans l'expérimentation menée lors des deux années sur le Journal du Nombre. Maintenant, nous revenons sur le contenu de chacun des quatre chapitres.

Le chapitre 1 retrace la genèse de l'idée théorique du Journal du Nombre à partir de l'expérimentation menée dans une classe de cours moyen à partir de la Fabrique des fractions. Il évoque le rythme d'apprentissage dans l'école classique ainsi que la dévolution, notion essentielle développée par Brousseau dans la théorie des situations didactiques. Il montre un travail de production réalisé par des élèves de cours moyen sur les énoncés des problèmes de fraction. Il permet de décrire les fondements sur lesquels reposent cette thèse.

Le chapitre 2 inscrit la pratique du Journal du Nombre dans une classe de cours préparatoire à

Quimper, intégrée dans les premiers modules d'un domaine de la recherche Arithmétique Compréhension à l'École Élémentaire (ACE). Il s'agit de construire un arrière-plan nécessaire au partage d'un « voir comme » par un premier recueil d'indices dans les productions des élèves et de l'évocation de l'incitation productive collective avec l'anticipation.

Le chapitre 3 poursuit le recueil d'indices qui caractérise un « morceau de pratique ». Les productions des élèves produites dans le Journal du Nombre sont situées dans la séance filmée à laquelle elles appartiennent. L'extrait sélectionné correspond au temps de l'incitation productive collective. Les analyses étudient à nouveau l'incitation productive collective dans les extraits de transcriptions avec la cellule de diffusion et la notion de réticence-expression.

Le chapitre 4 regroupe des travaux d'élèves des années 1 et 2. Il explicite le pourquoi d'une telle démarche dans une classe de cours préparatoire, les atouts visés et attendus dans la construction du nombre. Il montre la progressivité du travail de l'élève et du professeur. Nous exposons des productions d'élèves dans le Journal du Nombre où l'élève est le producteur de ses propres énoncés.

CHAPITRE 1 : la genèse du Journal du Nombre

1. INTRODUCTION SUR LES FONDEMENTS DU JOURNAL DU NOMBRE

L'organisation générale de cette partie se compose de quatre chapitres explorant les fondements théoriques et les différentes mises en œuvre du Journal du Nombre. Dans le chapitre 1 se trouve explicitée l'origine du Journal du Nombre et la mise en œuvre dans une classe de CM1/CM2 du dispositif qui l'a inspiré, le Journal des Fractions (Sensevy, 1996, 1998). Le chapitre 2 développe plus particulièrement la place du Journal du Nombre dans la recherche ACE. Le chapitre 3 retrace une analyse empirique du Journal du Nombre dans une classe de cours préparatoire. Quant au dernier chapitre (4), il concerne le travail sur les énoncés de problèmes.

1.1 Le Journal du Nombre, origine et fondements

Dans cette partie de la thèse, nous répondons aux questions suivantes : les fondements du Journal du Nombre, le « pourquoi du Journal du nombre dans la recherche ACE ? ». Avant de proposer quelques éléments de réponses, nous nous intéressons aux productions d'élèves dans le Journal du Nombre et aux mises en œuvre dont l'enjeu est la construction d'un arrière-plan sur l'objet « Journal du Nombre ». Celles-ci se différencient, nous semble-t-il, lors des années 1 et 2. Nous rappelons que l'année 0 fut une année-test pour les différentes situations et modules.

1.1.1 L'origine du Journal du Nombre

Nous citons deux historiettes (Sensevy, 1998), comme point d'ancrage à l'étude de la construction de l'autonomie et de la mémoire didactique pour représenter l'origine du Journal du Nombre. Il s'agit de questionner la position de l'élève et l'avancée du temps didactique. En effet, ces deux histoires courtes montrent pour l'une, un élève *en position d'attente*. L'élève est hors de sa classe d'origine puisque le maître est malade. L'élève s'ennuie. L'élève se trouve « étranger » dans la classe d'accueil. L'histoire transcrit une dépendance au maître. La seconde histoire concerne un élève *avancé.* Celui-ci explique au professeur qu'il pratique « l'oubli volontaire ». Une fois l'interrogation réalisée sur la leçon apprise, il s'empresse d'oublier ladite leçon pour faire de la place (dans sa tête) à la leçon suivante.

1.1.2 L'idée théorique

L'enjeu majeur est donc la construction de l'autonomie de l'élève abordée à partir du modèle tryptique de « l'autorisation » agent-acteur-dévolution. Sensevy présente ainsi ce modèle :

« Devenir son propre co-auteur, c'est certes limiter la portée des déterminismes, ce qui n'empêchera pas l'individu d'être simultanément, toujours, agent et acteur ...En particulier, il (ce modèle) incite à poser la question suivante : qu'est-ce que l'autorisation, pour l'élève de l'école élémentaire ? Comment celui-ci peut-il devenir son propre co-auteur, dans le lieu où il est enseigné et où il doit apprendre ? » Sensevy, 1998, p. 5.

Ce modèle est alors conceptualisé sous divers aspects. Dans ce qui suit, nous allons considérer successivement l'institution-classe, la classe comme champ et le contrat didactique.

1.2 Le champ de l'institution, l'institution-classe

La classe est considérée comme une institution constituée d'une pluralité de systèmes symboliques qui peuvent être à leur tour considérés comme des institutions. La classe est donc un lieu d'institution et le travail d'institution assure l'apprentissage.

« ...le travail d'institution *est* l'apprentissage. A travers la personne du maître, le travail d'institution désigne, dessine, à la fois l'ensemble des objets qui doivent vivre dans la classe et l'ensemble des rapports que les élèves doivent former à ces objets». Sensevy, 1998, p.13.

Ainsi, jour après jour, les élève et le professeur participent à l'institution. Tout se passe, pour le professeur et pour les élèves, comme s'il n'y avait pas d'autres façons d'enseigner et d'apprendre. Nous dirions que les activités prennent sens, à travers l'institution, par l'énergie investie par la classe.

« La notion d'institution est ainsi ce qui naît dans le jour après jour expérientiel, et qu'on s'incorpore. Cette manière « expérientelle » de la penser montre le lien fondamental qu'elle entretient à l'historicité. Historicité de la praxis humain, au sens de Marx, qui rend la contingence productrice de sens ». Sensevy, 1998, p.11.

L'institution peut donc être définie comme un système de structures que le sujet s'incorpore. Le rapport à l'institution peut être celui de l'agent qui participe à la communauté. Il s'agit de l'institution « vue de l'intérieur ». Le rapport à l'institution « vue de l'extérieur » est la définition de quelques-unes des propriétés qui peuvent définir l'institution.

Cette définition de l'institution à l'aide du modèle tryptique a des conséquences, par exemple, la nécessité d'étudier le comportement des élèves dans telle institution ou tel ensemble d'institution. Ensuite, il s'agit de questionner comment telle institution produit, à travers l'expérience vécue par les élèves, des comportements et des pensées. Puisque l'institution est instituante, l'institution-classe peut-elle être changée tout en sachant qu'elle doit continuer à jouer un rôle de formation et de mise en cohésion ? D'où la nécessité de s'intéresser également à la manière dont l'institution-classe construit ses sujets et à comprendre comment s'exerce le travail d'institution.

1.2.1 Dans la classe, champ et contrat didactique

La classe comme un champ

La classe peut se concevoir comme un champ (Bourdieu, 1992). Les élèves, s'ils jouent le jeu, recherchent des profits symboliques. Le « voir de l'intérieur » détermine ce qui sous-tend les intentions de l'élève et l'intérêt d'obtenir un profit symbolique, appelé aussi « capital d'adéquation » (Sensevy, 1997) que l'on peut mettre en correspondance avec l'expression « faire ce qu'il faut comme il faut ». Le « voir de l'extérieur » consiste, quant à lui, à mettre la classe en relation avec les champs dans lesquels celle-ci est enrobée.

« Ainsi la pratique, prise dans l'institution fonctionnant comme un champ, cristallisée sur des objets de savoir, produit ses normes au moyen du travail d'institution, celui en particulier qui consiste en fait à inciter les membres à faire des choses d'une certaine manière et à porter un verdict sur leurs actions ». Sensevy, 1998, p. 23.

Le contrat didactique

La notion de contrat didactique, dans une perspective en filiation avec les conceptions de Brousseau (1998) et Chevallard (1991), affirme l'attention portée aux savoirs considérés comme objets transactionnels de la relation professeur-élève. Le contrat didactique fait saisir que l'élève apprend *dans* mais aussi *par* le contrat. Il doit permettre de comprendre l'inculcation des habitus scolaires et les modifications possibles de ces habitus dans un travail d'institution déterminé avec la redéfinition possible du contrat-didactique classique. Le contrat didactique peut être alors considéré comme un couplage champs/corps ↔ habitus, spécifique aux institutions didactiques.

« C'est l'institution qui, en agissant comme une théorie, fonde les identités, les classifications, les catégorisations sur lesquelles reposent les pensées. Les bases de la cognition sont donc fondamentalement sociales ». Sensevy, 1998, p. 17.

La notion de contrat permet ainsi d'envisager de changer les pratiques de classe. Pour cela, il est nécessaire de redéfinir le contrat didactique afin d'organiser différemment le travail d'institution au sein de la classe. Cela implique aussi d'autres formes de partage des lieux (modification topogénétique), et de penser d'autres catégories de l'action du professeur et de l'élève.

1.3 Le savoir

La question de la mémoire est fondamentale et il semble important de penser le temps didactique et le rapport au savoir reposant sur une antériorité. Celle-ci (l'antériorité) dépasse la seule antériorité séquentielle. C'est pourquoi, selon Sensevy, il est nécessaire de développer d'autres gestes et techniques, ceux de l'élève et ceux du professeur, pour relier les productions de l'élève au temps didactique pour éviter la mémoire de la succession qui n'est pas une mémoire de l'apprentissage.

Dans le contrat didactique classique, le professeur semble pouvoir fonctionner sans mémoire didactique pourtant les travaux de Centeno (1995) évoque l'historicisation du processus d'enseignement. Il est en effet essentiel que :

« ...les savoirs puissent devenir l'histoire et la pensée de quelqu'un ». (Centeno, 1995, p.196)

« Le savoir de l'école est un savoir-temps : les objets de savoir ne vivent pas longtemps dans la classe, et la pression du temps didactique interdit à l'élève de se constituer une expertise ». Sensevy, 1994, p. 54.

« C'est en particulier parce que la réification du temps didactique dénie le travail de l'élève dans sa durée propre. Celui-ci doit la retrouver, d'une manière invisible à l'institution, s'il veut réussir. La mémoire de l'élève qui apprend n'est pas une mémoire de la succession, mais de la coexistence ». Sensevy, 1998, p. 54 .

1.3.1 Le savoir, les fractions

Une place importante est accordée à l'étude des fractions au Cours Moyen. C'est le lieu où l'élève rencontre pour la première fois cet objet. La notion de fraction se trouve dans l'enseignement français sous des aspects différents, difficiles à relier. Traditionnellement, la fraction-partage existait dans toutes les classes de Cours Moyen puis un autre rapport à l'objet fraction s'est développé qui consiste notamment à demander à l'élève de produire le décimal représenté par la fraction. Cet objet, par sa complexité, pouvait être choisi et agir comme un révélateur des modifications topogénétiques et temporelles assurées par deux dispositifs que sont le Journal des fractions et la Fabrique des énoncés de problèmes.

1.3.2 La fabrique des problèmes

La démarche didactique consistait à demander aux élèves de fabriquer des énoncés de problèmes. Il s'agissait ainsi de redéfinir le contrat didactique classique.

« Cette redéfinition devait prendre pour base l'interrelation fondamentale, entre les normes sociales et le sens mathématique, dialectiquement reliés dans une activité mathématique conçue inséparablement comme cognitive et sociale, comme *pratique* ». Sensevy, 1994, p.140.

Dans la classe-recherche de Sensevy, la fabrication de problèmes a pu se concevoir comme un processus d'autorégulation. Les élèves devaient fabriquer des problèmes et s'assurer de la conformité de leur travail avec une fiche de critères qui orientait l'activité. Les productions soumises lors du débat organisé permettaient la rédaction de critères. La fiche recensait/cristallisait donc les représentations partagées par la classe. Elle était une sorte d'emblème. Les significations partagées pouvaient aussi amener à la construction d'autres relations ou à l'utilisation d'autres objets sémiotiques.

1.3.3 Le Journal des fractions

Les élèves étaient placés dans une situation qui leur permettait d'écrire des mathématiques, c'est-à-dire des énoncés de problèmes. L'activité déployée dans le Journal des fractions pouvait constituer une activité de validation. Nous donnons une rapide description de l'institution-instrument nommé « Le Journal des Fractions ». Après un premier enseignement, les élèves ont reçu un Journal des Fractions. Ce Journal ne fera l'objet d'aucun contrôle, ni bilan. Il est destiné à écrire les « expériences » concernant le domaine des fractions.

Le fonctionnement général du Journal des fractions comprend quatre phases :

-phase 1 : les élèves explicitent les rapports qu'ils ont à certains objets d'enseignement en répondant à certaines questions du professeur. Ce sont des productions de première génération.

-phase 2 : certaines productions qui contiennent une question sont choisies par le professeur pour qu'elles soient ensuite proposées à la classe entière. Chaque élève travaille alors dans le Journal des Fractions sur certaines productions des pairs. L'élève fabrique des productions de seconde génération.

-phase 3 : parmi certains productions de deuxième génération, le professeur en choisit quelques-unes qui semblent pouvoir faire avancer le temps didactique.

-phase 4 : un débat est organisé avec l'ensemble de la classe où les productions sont éventuellement résumées pour appartenir à la Théorie des Fractions présente dans la classe.

2. LA MISE EN OEUVRE EFFECTIVE

La recherche sur les fractions s'est déroulée lors de deux années scolaires dans une classe de CM1 et CM2, le professeur ayant suivi la même cohorte d'élèves lors des deux années L'année 1 consiste dans la création d'une culture mathématique adéquate[4]. L'année 2 se caractérise, quant à elle, par la mise en fonction des instruments, la fabrique des problèmes et le journal des fractions, rendue possible par l'année 1.

La notion de milieu est alors considérée à partir de deux théories, le milieu de Brousseau (1990) et le milieu de Chevallard (1992), mises en comparaison.

Le milieu de Brousseau

Sensevy nous précise que le milieu de Brousseau et de la théorie des situations ne prend pas comme « objet milieu » l'univers dans son ensemble mais qu'il modélise l'environnement spécifique d'un savoir ou d'un de ses aspects. Cette modélisation semble nécessaire puisque les connaissances des élèves et des professeurs fonctionnent différemment des savoirs savants correspondants. Ensuite, Brousseau place cette modélisation dans un modèle d'interaction général inspiré de la théorie des jeux. Il considère les situations comme des états du jeu indéterminés à la fois par le joueur et par le milieu antagoniste. La situation sert à la fois de référence aux savoirs et aux objets de reconnaissance. Le système antagoniste du joueur est une modélisation du savoir en jeu. Il réfère à la connaissance en jeu et aux actions que détermine la modélisation. Le milieu est nécessaire à la connaissance. Un milieu antagoniste peut être défini comme un milieu dont l'élève va s'emparer pour construire une réponse à partir des rétroactions obtenues dans ce milieu.

> « On peut y voir en particulier des élèves en interaction avec le milieu (la nature) sans qu'en aucune façon l'enseignant n'intervienne pour modifier la nature de cette interaction : il se « contente » d'agir sur les conditions de cette interactions, de manière à laisser le jeu vivre et évoluer. Donc, si le jeu évolue, ce n'est pas en raison de l'intervention magistrale, mais à cause des réponses que la nature renvoie au joueur ». Sensevy, 1998, p. 113.

Deux dimensions fondamentales apparaissent alors, il s'agit de l'adidacticité et la dimension mnésique. Si le milieu peut se concevoir comme ce qui va causer l'adidacticité, comment produire cette construction ? Quant à la mémoire, puisqu'elle s'ancre sur le travail adidactique, Sensevy pense qu'elle s'accomplit dans la durée de l'élève.

Le milieu de Chevallard

Chevallard définit le contrat institutionnel ainsi (I = institution, R = rapport, O = objet et Oi = ensemble des objets pour l'institution I) :

> « On désigne par Ci(t), et on nomme *contrat institutionnel* relatif au temps à I au temps t, l'ensemble des couples (O, Ri (O,t), où O est un élément de Oi (t) ». Chevallard, 1992, p.89.

Le milieu apparaît ici comme donné d'avance. Les deux théories sont d'accord sur l'importance de constituer en tant que tel le rapport au milieu. Selon Sensevy, la différence se joue sur la nature de la régulation que permet chaque type de milieu. Le milieu de Brousseau permet à l'élève de construire

[4] Dans le vocabulaire actuel de la TACD, il s'agirait de la création du contrat didactique.

des réponses qui vont lui permettre de s'adapter après une déstabilisation cognitive tandis que le milieu de Chevallard, lors d'une rencontre avec une difficulté cognitive, consiste à s'appuyer sur le monde familier pour avancer. Nous avons vu, dans la partie « Éléments théoriques » de cette thèse, que la TACD, aujourd'hui, considère le contrat, le milieu, et leurs relations à travers la théorie de l'équilibration didactique, qui réorganise les éléments précisés ci-dessus. Nous reviendrons sur ce point.

2.1 Le « milieu »[5] dans la classe recherche de Sensevy

Puisqu'au triplet (professeur, élève, savoir), il semble nécessaire d'ajouter le milieu, dans la classe-recherche, la « constitution du milieu » consistera à aménager des espaces didactiques à l'évolution des élèves et favoriser la rencontre de l'élève avec son ignorance.

« Il semble bien que toute personne engagée dans une pratique sociale ait à exercer un sens pratique, un « sens du jeu » pour réussir. Ce sens pratique suppose d'établir rapport à certains objets, qui semblent devoir être des mixtes composés d'objets « techniques » enseignés en tant que tel (ou au moins couramment et précisément nommés et définis dans la culture) et d'objets en général flous, à la dénomination très polysémique s'ils sont nommés, objets dont on dit dans la culture « qu'ils ne s'apprennent pas », « qu'ils se sentent ». Ce qui donne, à notre sens, une pratique réussie, c'est cette mixité, pleinement éprouvée par la personne, qui forme donc un rapport complexe, où objets « techniques » et objets « qui ne s'apprennent pas » sont en interrelation ». Sensevy, 1998, p. 118.

Nous précisons que les objets dont parle Sensevy, comme dans la théorie des situations didactiques, sont une manière pragmatique de désigner des activités et des techniques mentales, des outils mentaux.

« Ils sont donc comme le dit Castoriadis (1990) des objets par « position », et non par « nature ». Sensevy, 1998, p. 122.

2.1.1 L'erreur

Sensevy souligne l'importance du travail sur l'erreur.

« En apparence, la théorie didactique peut faire l'économie de l'erreur, c'est-à-dire qu'elle peut considérer le rapport au savoir de l'élève comme adéquat ou non adéquat au rapport institutionnel, sans accorder un intérêt particulier aux cas où cette adéquation n'est pas produite. Il semble pourtant que l'analyse du statut de l'erreur, au sein d'une structure didactique considérée, peut constituer un révélateur privilégié quant à la nature de cette structure. Il semble aussi qu'au delà de la régulation par le résultat, l'erreur, si elle revêt le statut adéquat, peut jouer un rôle privilégié de régulateur ». Ravestein & Sensevy, 1994, p. 125.

L'option retenue pour cette recherche sera de considérer l'objet « travail sur l'erreur » comme pertinent pour l'objet « activité mathématique ». Ce travail sur l'objet « erreur » ne sera pas construit à partir d'injonctions professorales mais selon deux types d'intervention.

Des interventions orales du professeur, plutôt de commentaires qui peuvent être alors considérés comme l'ostension aux élèves d'une activité réflexive sur leurs activités.

Le second type d'intervention sera l'organisation d'une situation spécifique sur le travail sur l'erreur.

Voici les différentes étapes des séquences mettant en œuvre ce travail sur l'erreur :

- phase 1, avec la photocopie d'un texte mathématique erroné produit par un groupe d'élèves et

[5] Ce que Sensevy nommait « milieu » en 1998, est appelé aujourd'hui « contrat ».

choisi par le professeur pour ses propriétés didactiques ;

- phase 2, individuellement ou en dyade, chaque élève repère l'erreur, la corrige, lui attribue une cause et cherche par anticipation comment la classe pouvait éviter de la refaire ;

- phase 3, le débat est dirigé par le professeur qui réunit la classe.

Ce sont des pratiques qui ont concerné l'année 1 de la recherche et qui constituaient une rupture profonde avec les habitudes des élèves, dans l'élaboration d'un nouveau type de contrat didactique.

« Une difficulté supplémentaire est que le travail qui amène un groupe d'élèves, une dyade par exemple, à collaborer réellement est inséparablement cognitif et affectif : par exemple, il faut prendre conscience que celui qui explique une chose à quelqu'un qui ne l'a pas comprise, travaille autant, avec autant de profit, sinon davantage, que celui à qui il s'adresse. Ceci constitue constitue, pour les élèves, une de ces dispositions à incorporer pour lesquelles le travail de désincorporation qui doit nécessairement précéder est extrêmement difficile. Cela ne peut se faire que dans le temps long, et dans la réflexivité quasi-permanente d'un débat sur le débat qui est des outils essentiels de l'inculcation de cette pratique ». Sensevy, 1998, p.131.

Il s'agit que la classe accepte de fonctionner comme une « communauté scientifique » où le professeur joue un rôle spécifique et très différent du rôle habituel. Les élèves doivent accepter l'augmentation de l'incertitude et renoncer à des indicateurs de vérité.

2.1.2 La fabrication de problèmes de fractions (l'année 2)

Les séquences d'enseignement devaient permettre de modifier la position habituelle de l'élève au sein du contrat didactique. Pour favoriser la position de dévolution, il était donné à l'élève la responsabilité de produire des énoncés de problèmes de fractions et de partager avec le professeur et l'ensemble de la classe des significations relatives à cette pratique.

« Cette construction de problèmes par les élèves devait prendre place dans une classe où les mathématiques sont conçues sur la base d'une activité partagée, où les élèves « participent à la constitution interactive des situations dans lesquelles ils apprennent ». (Cobb, Yackel, et Wood, 1992b) : en effet, pour que les élèves puissent trouver des raisons de fabriquer des problèmes, il faut qu'ils puissent les proposer à d'autres élèves, pour que ceux-ci en discutent et en proposent des améliorations, ou bien qu'ils les résolvent. » Sensevy, 1998, p.137.

Sensevy précise ensuite le cadre théorique correspondant à ce dispositif :

« Le cadre théorique spécifique sur lequel la pratique de fabrications de problème s'est édifiée peut ainsi se résumer de la manière suivante : l'activité épistémologique de l'élève est indissociablement liée au partage des significations que nécessité la pratique mathématique conçue comme socialement fondée dans une communauté. Elle repose, pour ce qui concerne précisément le cas des problèmes des fractions, sur une conception du sens du nombre qui considère celui-ci comme écologiquement construit par les possibilités offertes (« affordances », Gibson, 1986) et les contraintes des situations que l'élève rencontre dans son activité mathématique. Elle se construit dans un environnement de « taille intermédiaire », dans lequel l'élève construit matériellement des produits mathématiques ». Sensevy, 1998, p.142.

2.1.3 La pratique du débat

L'intention était que l'élève construise un rapport au dialogue entre pairs. Ce dialogue était l'occasion de s'entraîner à la formulation, de conjectures, à la production de preuve ou de réfutation. Le débat pouvait être libre ou en structure ascendante, c'est-à-dire que la question était d'abord travaillée individuellement ou en dyade, ensuite inter-dyade (groupe de 4 élèves), puis inter-groupe, enfin présidé par le professeur. Vigotsky (1985) a montré le rôle fondamental du langage dans le processus d'intériorisation .

« Dans cette perspective, le travail en dyade apparaît comme un moyen privilégié d'activer ce processus, puisque l'élève est forcé, dans le cadre même de l'interaction, de constituer en actions concrètes une pratique où le langage joue un rôle privilégié de médiation ». Sensevy, 1994, 158.

2.1.4 Le rôle du professeur

La fonction du professeur n'est donc plus d'obtenir des réponses justes. Il s'agit d'accompagner « l'enquête mathématique », c'est-à-dire d'initier et de guider. Cela nécessite un certain nombre de gestes et de techniques accompagnant les dispositifs institutionnels. Ces gestes étaient ceux d'un praticien et d'un chercheur et cherchaient à faciliter le dialogue entre les élèves, l'aide au travail coopératif, la mise en évidence des interprétations contradictoires, l'institutionnalisation par des commentaires appropriés sur des productions d'élèves et l'élaboration de significations partagées qui puissent s'inscrire dans la mémoire didactique de la classe.

« La notion de geste, par exemple, celle de geste professionnel, est forcément pratique : réussir un geste, c'est avoir le sens du Jeu, c'est parvenir à s'inscrire dans le jeu, dans le flux du réel » Sensevy, 1994, p.102.

3. BREFS ÉLÉMENTS DE DISCUSSION

Le Journal des Fractions se présente comme une institution-instrument prototype. Il est construit sur des considérations théoriques et destiné à évoluer en fonction de l'évolution de la théorie. Nous retenons quelques aspects de ce dispositif, notamment pour les élèves *moins avancés.* La modification du clivage public-privé nous semble essentielle. Dans ce dispositif, Sensevy montre que rapport de l'élève aux objets de savoir se modifie et tend vers la construction de connaissances « personnalisées ». La mise en débat à partir de productions d'élèves aide les élèves *moins avancés* à trouver une place dans la classe et à participer à l'avancée du temps didactique. Enfin, la mise en réseau des élèves avancés et des élèves moins avancés autorise la reconstruction des connaissances.

« Le journal des Fractions constituait également un dispositif d'apprentissage, sans atteindre cependant à la complexité d'une ingénierie ». Sensevy, 1994.

CHAPITRE 2 : le Journal du Nombre et la recherche ACE

Dans ce qui suit, nous tentons d'apporter au lecteur une vision générale du fonctionnement du journal dans la classe, et de son évolution. Nous construisons un arrière-plan pour la compréhension de l'enquête mathématique menée par l'élève dans le Journal du Nombre. Dans les chapitres suivants (3 et 4), nous nous centrerons sur des éléments signifiants spécifiques du Journal à partir de l'incitation productive collective.

1. LA PLACE DU JOURNAL DU NOMBRE DANS LA RECHERCHE ACE

Le chapitre débute par un rappel des modules et des connaissances du domaine *Situations*. Il se poursuit une présentation de productions d'élèves. Ce choix repose sur la nécessité de donner à voir un ensemble de travaux réalisés par les élèves d'une même classe afin de construire un arrière-plan commun entre les lecteurs de la thèse et l'auteur, et de faciliter la présentation des modules de la recherche ACE. Montrer les productions, nous semble-il, permet d'envisager les notions travaillées sur la durée selon la progression Arithmétique et Compréhension à l'École Élémentaire (ACE) pendant l'année du cours préparatoire. Les travaux semblent permettre de suivre les chemins empruntés par les enfants de six ans dans la conceptualisation du nombre lors de la mise en œuvre des situations ACE.

Ces productions d'élèves appartiennent à un cahier de recherche dont nous allons expliciter les spécificités. Ce cahier de recherche se nomme le « *Journal du Nombre* ». Comme nous le verrons, il n'est ni un fichier de mathématiques ni un exerciseur. Son objectif est de permettre à l'élève de faire et écrire des mathématiques avec des connaissances personnelles, des connaissances de la classe et même des interrogations vis-à-vis des savoirs en construction.
Nous le verrons également plus bas (cf. §), le rythme d'apprentissage n'est pas un rythme classique, pourrions-nous dire, puisque l'élève, pour s'approprier les notions travaillées et visées dans les différentes situations, *mène des enquêtes mathématiques*. On pourrait décrire la fonction du journal du nombre, telle dont la recherche la postule, comme suit. L'élève explore le nombre. Il expérimente les usages et les conventions des signes. Il vit des expériences cruciales avec et en rapport avec le nombre. Il *se donne* des enquêtes mathématiques.

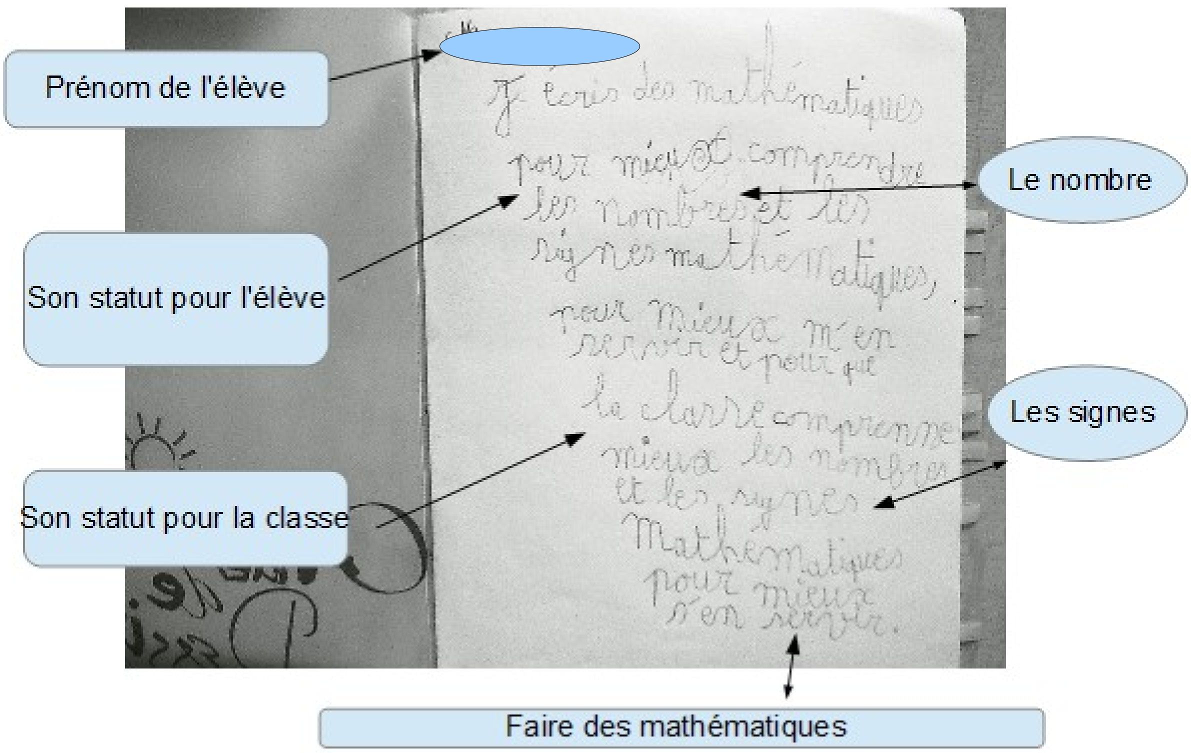
Le « Journal du Nombre » est donc un outil au service de l'élève pour penser, écrire et dire des mathématiques. C'est aussi un outil pour la classe puisque la présentation de travaux individuels, mis en débat, devrait agir sur l'avancée collective dans l'élaboration du nombre. Une des particularités essentielles pourrait être d'abolir un certain cloisonnement des savoirs, ce que nous étudierons lors des analyses. Son usage quotidien ou très régulier consistera à favoriser, pensons-nous, la diffusion des questionnements et des algorithmes pour l'apprentissage/enseignement de chacun et de tous. Il possède, selon nous, deux autres caractéristiques importantes que nous tenterons de démontrer. Il est avant tout un cahier de réussites. L'élève ne peut échouer puisqu'il part de ses connaissances. L'élève connaît toujours un peu de mathématiques sur lesquelles il va pouvoir construire. Ensuite, chaque « Journal du Nombre » est unique. Il contient les réalisations et les cheminements personnels de l'élève. Il ne peut, de ce fait, être identique à un autre « Journal du Nombre », même si des éléments se ressemblent et convergent puisque l'élève étudie le même savoir.

Pour mener l'enquête à la recherche des traces de la conceptualisation du nombre, nous avons sélectionné des productions d'élèves issues de plusieurs cahiers. Elles visent pour l'instant, répétons-le, l'élaboration d'un arrière-plan destiné à la compréhension de la thèse. Elles représentent des traces possibles de connaissances élaborées par les élèves qui construisent le nombre selon la progression Arithmétique et Compréhension à l'École Élémentaire (ACE). Nous choisissons des travaux dont les mises en œuvre appartiennent à l'origine au domaine « *Situations* ». Rappelons que la progression ACE comprend quatre domaines d'investigation du nombre. Ces quatre domaines se nomment le « domaine *Situations* », le « domaine *Calcul Mental* », le «domaine *Résolution de problèmes* » et « l'*Estimateur* ». Le « domaine *Situations* », quant à lui, se partage en onze modules.

La construction du nombre commence avec la progression ACE par le module 0. Celui-ci s'intitule « construction et comparaison de trains/tours ». Avant de s'engager plus avant dans le recueil d'indices, ouvrons la porte et entrons par *la page de garde d'un « Journal du Nombre »*. Sur la page de garde du Journal du Nombre, tous les élèves ont écrit cette phrase : *« J'écris des mathématiques pour mieux comprendre les nombres et les signes mathématiques, pour mieux m'en servir et pour que la classe comprenne mieux les nombres et les signes mathématiques pour mieux s'en servir ».*

Le rôle du cahier a été explicité par le professeur dès sa mise en route. Cette grande phrase fut copiée plus tardivement dans l'année scolaire lorsque l'élève était en capacité de la recopier.

Le *Journal du Nombre,* son statut et sa fonction



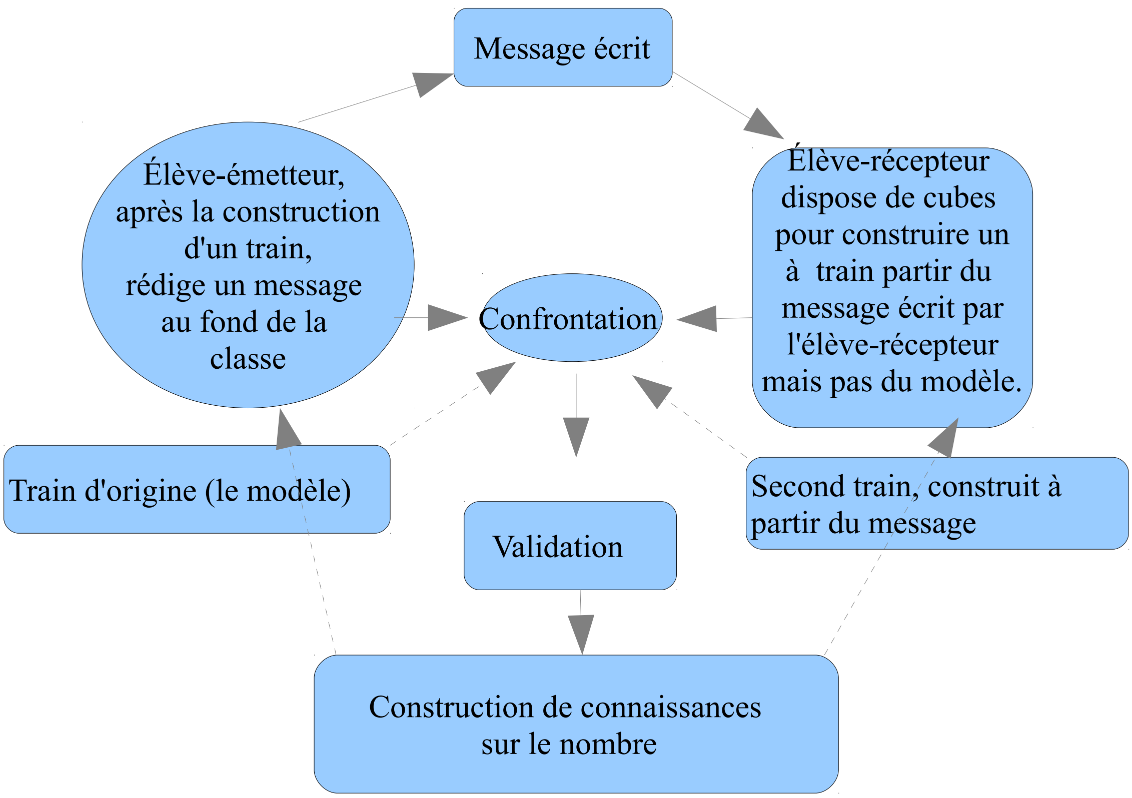
Photographie n°0 : page de garde du Journal du Nombre
Date, mi-année scolaire pour la copie de la grande phrase

L'élève a copié cette longue phrase dans le Journal du Nombre lorsqu'il a été rodé à l'usage de l'enquête mathématique et « engrangé » une pratique du Journal du Nombre. Une page blanche (un espace) prévue était « en attente de... » et réservée à l'écriture de la « définition » du Journal du Nombre. Les mots racontent la pratique effective du Journal du Nombre de l'élève. La phrase ne pouvait être notée plus tôt, pas seulement d'un point de vue technique (la maîtrise incertaine des gestes de l'écriture) mais *essentiellement* parce que les mots devaient « être chargés » d'expériences mathématiques et de productions réalisées dans le Journal du Nombre.

Afin de donner une vision générale du Journal du Nombre, et à travers lui la logique de la progression ACE, nous avons choisi de présenter le développement du Journal à travers les six premiers modules de la recherche ACE comme nous l'avons précédemment évoqué. Nous analyserons toutefois, au sein des paragraphes suivants, certaines des productions pouvant également appartenir à d'autres modules. Les premiers modules de la recherche ACE se compose du module 0 avec la situation des trains. Les modules de 1 à 6, quant à eux, sont construits autour d'une situation centrale : le jeu des annonces « Dé et doigts ».

1.1 La construction et comparaison de trains/tours dans le module 0

Nous procédons à une rapide description générale qui permettra de poser le cadre de la situation. Un élève-constructeur, après avoir construit un train avec des cubes de couleurs, doit écrire un message pour un élève-récepteur, qui à son tour construira le même train à l'aide du message rédigé. Écrire un message pour construire un train est alors compris comme faire un dessin. Certains élèves tentent même de dessiner la locomotive et les fenêtres du train. L'ensemble de la classe pourtant dessine des « cubes ». Ils sont alors représentés sous la forme de ronds, de carrés de couleurs ou encore de simples traits. Ceux-ci sont tracés les uns à la suite des autres. Chaque élément représente une unité, c'est-à-dire un cube. Le nombre est rarement utilisé. Pourquoi utiliser le nombre puisque l'élève-émetteur a la possibilité de faire comprendre à l'élève-récepteur quel train est à construire ? Il suffit de le dessiner à l'aide des crayons de couleurs. Nous réalisons ci-dessous une schématisation du module 0 pour le domaine *Situations*.



Schématisation 1 : l'élève-émetteur et l'élève-récepteur

1.2 Descriptif du jeu des annonces, nommé « Dé et doigts »

Le jeu, qui structure le domaine « *Situations* » à partir du module 1, se pratique par équipe de 4 ou 5 élèves. Pour rappel, il y a des élèves-annonceurs qui disent un nombre à haute voix et le montrent avec les deux mains. Il y a aussi un élève-arbître qui jette le dé et valide. On gagne si et seulement si le nombre « dit et montré avec les deux mains » est le même que celui représenté par la constellation de points sur le dé (pour les contraintes et l'analyse de la situation, cf. l'analyse a priori).

Les élèves ont construit un premier rapport au nombre à la fois oral et concret. Le nombre se dit et se montre. Il s'oralise avec le mot-nombre et se matérialise sous une forme additive avec la contrainte de l'usage des deux mains. Pour gagner, la représentation additive construite avec les doigts doit correspondre dans un premier temps, au lancer du dé exactement. Ensuite lors de différentes phases, les décompositions additives pourront être inférieures ou supérieures dans la recherche du gain. Au début, l'enjeu est de posséder le même nombre que ..., pour mettre en correspondance une écriture additive en deux termes avec une constellation de points (le dé) reliées par un mot-nombre.

Le mot-nombre de chaque petit nombre est maintenant associé à l'écriture usuelle. Par exemple, la quantité de deux doigts est représentée sous la décomposition (2 et 0), mais aussi (1 et 1) et encore (0 plus 2). Elle s'énonce et s'écrit sous la forme d'une écriture chiffrée.

Nous faisons l'hypothèse que l'élève va user du nombre et non plus des doigts pour représenter une annonce. L'élève, rappelons-le encore, construit continuellement un rapport privilégié aux désignations plurielles d'un même nombre avec les situations de la recherche ACE et le module « *Situations* ». Il élabore la connaissance du nombre par un rapport particulier avec les décompositions, par une exploration continue. L'écriture de l'annonce en deux termes ou en trois termes projette l'élève dans un système numérique composé de nombres et de symboles. Expliquons-nous. L'élève peut toujours écrire l'annonce sous la forme d'une décomposition. Il peut bien évidemment produire une réponse, c'est-à-dire jouer au jeu des annonces en écrivant l'annonce demandée et cela sans user de signes mathématiques. Il respecte ainsi la règle du jeu. L'élève pourra écrire le nombre 1 suivi d'un autre 1, séparé d'un tiret ou d'une barre verticale. L'annonce est bien représentée à l'écrit. Le nombre-tout correspondant représenté par « 1 et encore 1, c'est 2 » doit être prouvé. L'élève, à l'oral, use de mots et compare la décomposition de doigts à la constellation du dé. Dans l'exemple que nous prenons, l'élève a choisi par exemple le nombre 2. Il écrit l'annonce sous la forme d'une décomposition mais comment prouvera-t-il son gain ? Il peut écrire 1 et 1 ou même 1 + 1 mais également 2 + 0. Comment signifier dans ce cas l'identité du nombre 2 ? L'élève a un « savoir que », il sait que 1 + 1, c'est 2. Comment l'écriture conventionnelle et la décomposition peuvent-elles entrer en relation ? Comment le « savoir que » 1 + 1 c'est 2 et le « savoir comment » prouver cette égalité peuvent-ils croître et se compléter ? C'est en particulier ce processus que nous étudions.

1.3 Vision d'ensemble des modules de 1 à 6

La poursuite des indices de la conceptualisation du nombre continue lors de la mise en œuvre des modules 1, 2, 3, 4, 5 et 6 que nous regroupons. Ces modules s'emboîtent sur la situation des trains réalisée lors du module 0. Nous pourrions dire que la spécificité du module 0 est de créer la confrontation et même l'interrogation avec le « pourquoi calculer ? ». La situation des trains sert ainsi de jonction avec la classe de Grande Section dont l'objectif prioritaire reste la maîtrise de la langue. Les élèves vivent des expériences sur le nombre à partir de la construction de trains et de la rédaction de messages (le passage par l'écrit). Ils parlent les mathématiques pour invalider les constructions et les messages. C'est à partir des expressions de tous les jours (c'est pareil, c'est différent, c'est un peu pareil mais différent ...) que l'élève apprend à préciser sa pensée, à la comparer aux autres et à la partager. De plus, l'élève va peu à peu construire le langage mathématique. L'expression, « c'est pareil » va se substituer peu à peu à « c'est égal » puis elle se précise encore davantage puisque le terme « égal » peut correspondre/signifier à la fois à une quantité totale ou à une quantité partielle. De plus, les situations vont favoriser chez l'élève les

passages entre le « savoir que » et le « savoir comment », par la construction de la réciprocité de la perception du nombre global et des multiples représentations.
L' écriture conventionnelle du nombre commence en fin de module 0 lors de la rédaction de messages pour l'élève-récepteur, privé du recours au dessin. L'usage du nombre sous la forme symbolique va s'élaborer en pratique régulière et s'ancrer définitivement dans l'enquête/étude des modules suivants. L'enjeu des modules de 1 à 6 se centre sur l'entrée dans la symbolisation pour la poursuite des notions mathématiques. Nous précisons quelque peu notre propos.

1.4 L'organisation de 6 modules du domaine « Situations »

Nous rappelons que les six modules s'organisent ainsi :
**Le module 1* construit l'égalité avec une annonce à deux mains et un lancer de dé. Il devrait permettre aux élèves de réinvestir les premières connaissances étudiées dans le module 0.
**Le module 2* étudie, entre autres aspects, l'égalité et la différence avec une annonce à deux mains et un lancer d'un dé. Il s'agit de l'entrée dans l' écriture symbolique avec les signes +, = et ≠.
**Le module 3* poursuit la construction de la notion de l'égalité avec une annonce à trois mains et un lancer de dé. L'élève est confronté aux signes < et > mais toujours avec les très petits nombres (jusqu'à 6).
**Le module 4* élabore la décomposition additive supérieure à deux termes. Il fait une grande place au statut du zéro avec une annonce à trois mains et un lancer de dé (travail de l'écriture symbolique avec les notions d' égalité, de supériorité et/ou infériorité). Il engage un travail d'entente puisque les élèves devront faire ensemble une annonce à 3 termes, c'est-à-dire à 3 mains (une main par élève).
**Le module 5* prolonge l'élaboration des notions mathématiques étudiées. Il augmente le champ numérique. Les deux dés permettent l'étude des nombres juste un peu plus grands que précédemment. Il s'agit des annonces avec des nombres supérieurs à 6 (annonce à deux mains, deux dés, oral, égalité/supériorité/infériorité).
**Le module 6* approfondit l'élaboration des notions d'égalité, de supériorité, et d'infériorité avec une annonce à deux mains et deux dés par l'écriture symbolique.
Envisageons maintenant, comme nous l'avons précisé ci-dessus, un certain nombre de productions d'élèves qui nous permettront de fournir une première description du journal du nombre.

2. LES PRODUCTIONS DES ÉLÈVES

2.1 Une vue d'ensemble de l'élaboration de la référence dans le module 0

Nous présentons, ci-dessous, une photographie d'ensemble qui donne à voir des constructions de trains. Ces dernières sont gardées en classe pendant un certain temps. Elles sont la référence et la mémoire de la classe et retracent l'élaboration progressive du nombre.
Les expressions « c'est pareil », « c'est différent », « c'est un peu pareil mais différent ….» prennent appui sur des expériences réalisées par les élèves pour vivre et penser les comparaisons. Lorsque les élèves disent : « Ce n'est pas le même nombre », nous cherchons et vérifions sur le train à quoi correspond l'expression « ce n'est pas le même nombre ». L'élève fait-il référence au nombre-tout, aux nombres-parties ou à l'ordre des nombres ? Ainsi s'élabore progressivement la *référence commune* de la classe.

Une vue d'ensemble des trains/tours

- A l'aide de cubes de 4 couleurs, les élèves construisent des trains de longueurs différentes ou identiques. Ils codent ensuite la réalisation sous un message d'abord avec des couleurs puis en noir et blanc.

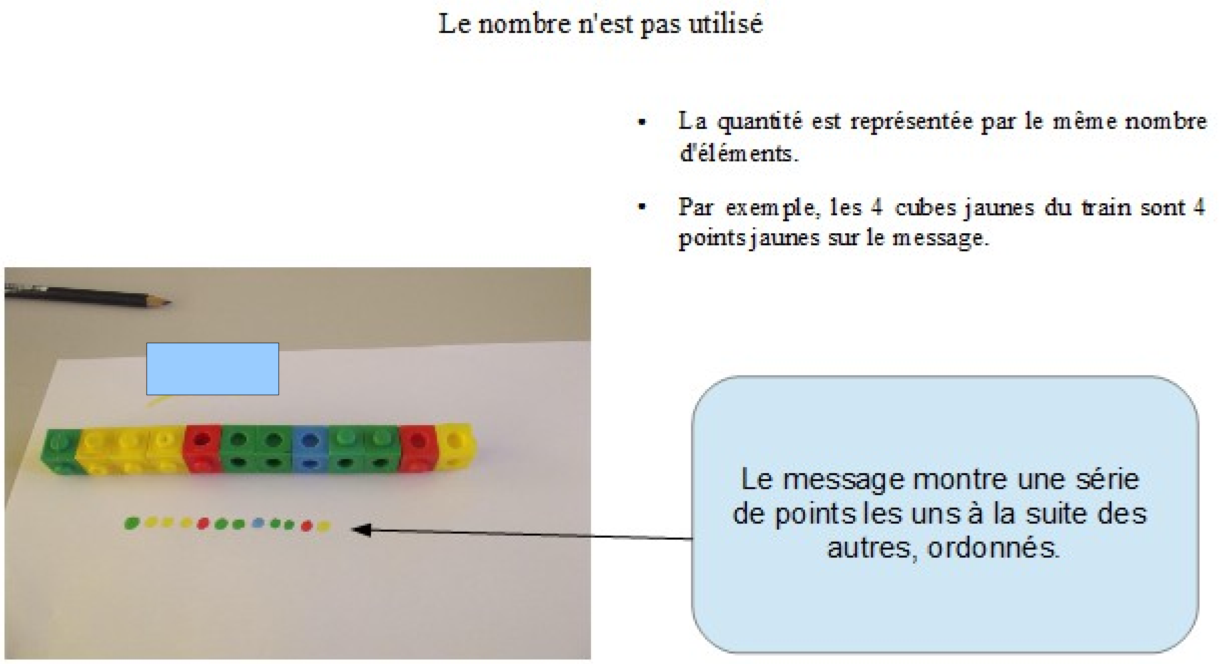
Photographie n°1 : une vue d'ensemble
Date, octobre 2012

Nous ajoutons une vue d'ensemble des trains/tours construit(e)s pour effectuer les comparaisons comme nous l'avons évoqué. Ces constructions permettent, lorsque les élèves utilisent les expressions « c'est pareil, c'est différent ... » de parler les mathématiques à partir des expériences réalisées en classe. Il est alors nécessaire de faire préciser aux élèves ce à quoi ils *font référence* lors de l'usage des expressions « pareil » et/ou « différent » et ce qu'elles désignent. Par exemple, que signifie : « c'est le même nombre de cubes ? » (les trains ont-ils la même « taille » ce qui pourrait revenir au même nombre total de cubes ou au même nombre de cubes pour une couleur. Par exemple, existe-t-il le même nombre de cubes bleus dans les deux trains ?) Cela peut aussi indiquer que l'ordre des couleurs est respecté mais la question des nombres et de la quantité pour chaque couleur n'est pas forcément envisagée.
Imaginons que l'élève construise un train avec le message suivant : 2B 3V 2B 1R. L'élève est confronté à la désignation du nombre sous la forme usuelle mais également à des décompositions. Prenons 2B et 2B qui font quatre. Il s'agit de « quatre » sous la forme deux cubes bleus et encore deux cubes bleus. Il pourra, selon les critères de la situation, se déplacer plusieurs fois pour aller chercher des cubes dans un lieu éloigné de sa place (le plateau avec les cubes). Dans ce cas, il peut avoir la possibilité de procéder à des ajustements. Il peut aller chercher 2 cubes bleus et lors de la construction, faire un réassort de deux autres cubes bleus. Si la contrainte consiste à limiter les déplacements à un voyage, l'élève doit anticiper et prendre la quantité de quatre cubes bleus après avoir effectué un regroupement. Deux et encore deux c'est quatre, il le sait. Pourtant lors de la construction, l'élève doit de nouveau envisager quatre non plus comme un nombre-tout mais comme la décomposition additive deux et encore deux (« séparés » par 3 verts) afin que le train soit conforme au modèle. L'élève ne peut regrouper les quatre cubes bleus nécessaires à la construction

les uns derrières les autres. Il s'agit toujours du nombre quatre mais sous la forme deux et encore deux.
La situation permet à l'élève de construire sur le nombre un double regard. Ce regard comprend à la fois le mot-nombre et/ou le nombre-tout et les décompositions. Cette question pourra bien entendue être soumise à la validation du groupe-classe. Le langage avec les expressions « pareil... et différent » participe activement à l'élaboration de cette double perception. On le conçoit ici, la comparaison et le langage sont deux éléments importants de la progression ACE.

2.2 Les traces prélevées dans le modules 0

Nous donnons quelques exemples de messages, produits en situation, sans le nombre. Les deux photographies suivantes illustrent la phase 1 de la situation des trains pour laquelle les élèves réalisent la tâche correspondant à l'écriture d'un message pour le codage d'un train construit avec des cubes de quatre couleurs différentes (le bleu, le rouge, le vert et le jaune).
La photographie n°1montre un élève-émetteur qui, après voir construit un train, réalise le codage du message pour l'élève-récepteur comme décrit dans le paragraphe précédent. Ce dernier (l'élève-récepteur) devra construit le même train à partir du message. Nous précisons que l'élève-récepteur ne dispose pas du modèle. Celui-ci servira à la validation.



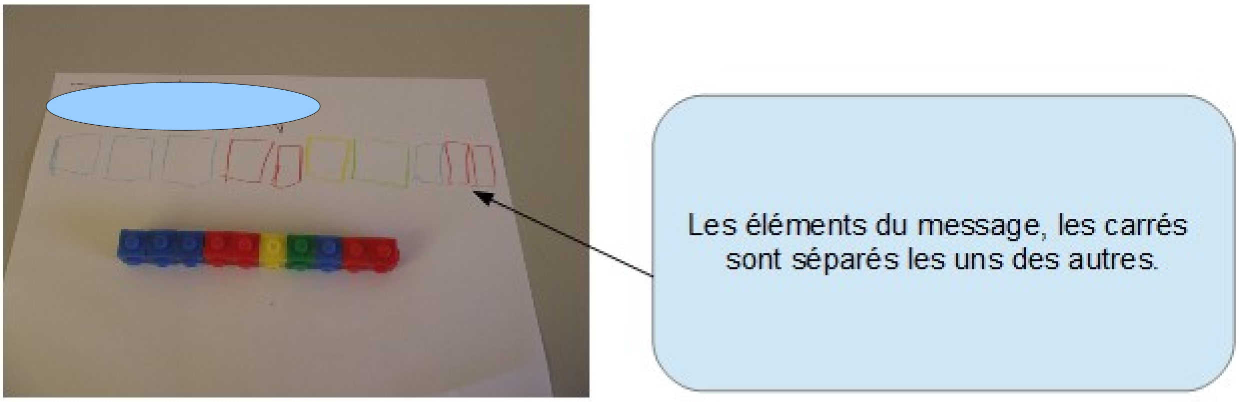
Photographie n°2 : les cubes sont représentés par des points remplis de couleurs
Date, septembre 2012 (première semaine de classe)

L'élève a codé la construction réalisée par une suite de petits ronds pleins de la couleur identique au cube et/ou au groupe de cubes correspondants. Le message est conforme à la réalisation/construction du train. Le message ne comporte pas la présence de nombre.

La production suivante est une illustration d'un message rédigé par un autre élève. Il représente les cubes lui aussi à l'aide de couleurs mais ce sont des carrés. Le nombre (l'écriture chiffrée) n'est pas encore utilisé. Ces deux messages sont identiques dans le procédé de codage, seule la forme donnée à la représentation des cubes change.

Absence du nombre également

- Sur ce message, chaque quantité est désignée par le même nombre de carrés qui représente les cubes du train.



Photographie n°3 : les cubes sont représentés par des carrés de couleurs
Date, septembre 2012 (première semaine de classe)

Ces photographies montrent le codage du message du train réalisé avec les cubes. Les deux messages sont justes parce que chaque élément (chaque cube) est représenté par un rond ou un carré avec la couleur adéquat, dans une sorte de correspondance terme à terme Nous remarquons que le nombre n'apparaît pas. Il n'y a pas de nécessité à cela Le message respecte l'ordre des couleurs. Le message est *le dessin.* Ce dessin est simplifié. Nous remarquons que le train avec les cubes et le message ne sont pas de la même longueur. Sur la photographie 1, le train-cubes est plus long que le message. Sur la photographie 2, le dessin est plus long que le train-cubes. Des traits de couleurs les uns derrière les autres sont une autre représentation de codage (des cubes) pour l'écriture d'un message. Nous faisons l'hypothèse que le nombre, au début du C.P, semble être davantage pensé comme *une suite d'éléments* parce que les dessins montrent des éléments *séparés* (carrés, ronds, traits). Ceux-ci sont « ordonnés » et représentent chaque cube du train. La représentation est ordinale.

2.3 Le milieu se modifie et les représentations évoluent

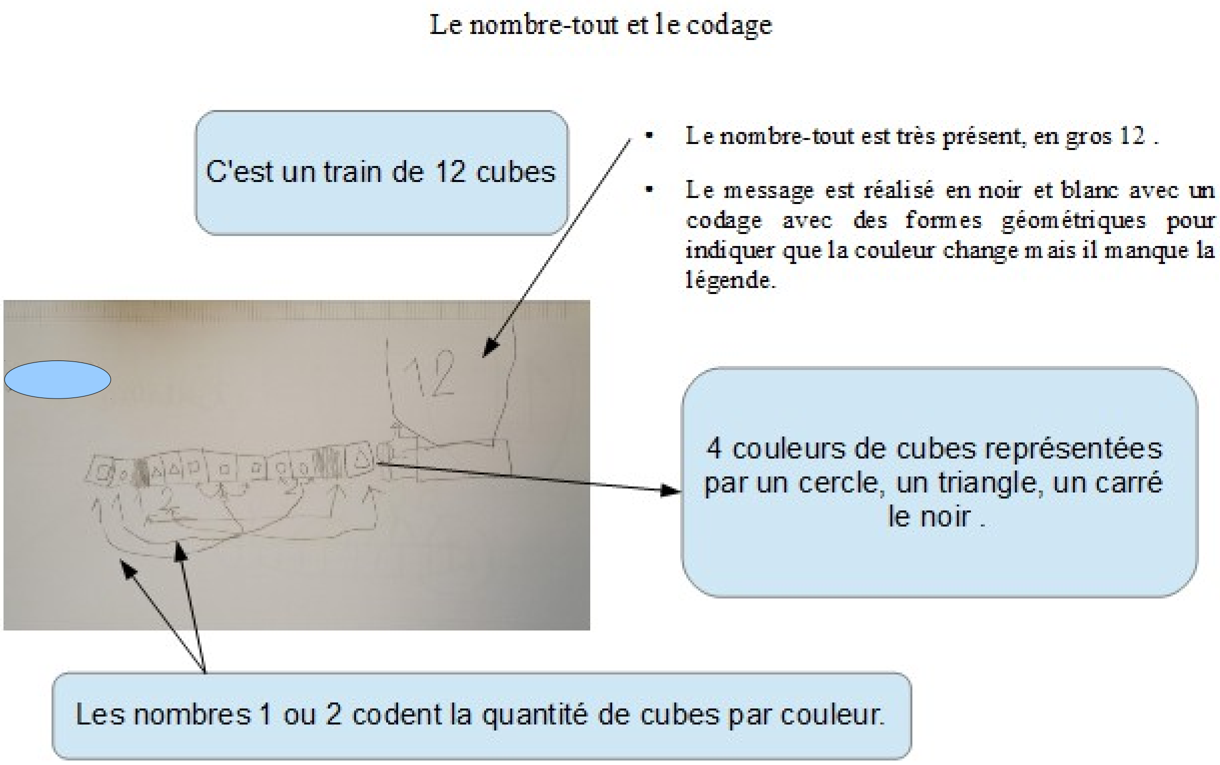
Dans la phase 2, la situation devient résistante par l'introduction d'une contrainte particulière qui consiste à ne plus accepter les dessins. L'élève est donc dans l'obligation de trouver un moyen de contourner cet obstacle. Maintenant, il faut écrire un message sans dessiner le train. Nous montrons une production dans laquelle le nombre-tout apparaît lorsque l'élève est privé de la possibilité de dessiner. Les premiers travaux présentés n'ont pas été directement produits dans le Journal du Nombre (le début du module 0). Les premiers messages dans la situation des trains étaient rédigés sur une simple feuille. Ils étaient considérés comme des essais. Ils devaient aussi pouvoir être

transmis/communiqués à l'élève-récepteur (c'est le pourquoi du choix du professeur : un moyen de communication simple et transportable). Plus tard, le professeur a réalisé une sélection des travaux à coller dans le Journal du Nombre. Pour l'émetteur, il devient urgent de fournir des indices qui rendent l'élève-récepteur capable de construire un train identique au modèle puisque ce dernier n'est pas visible. Lors de cette phase, nous allons observer une évolution dans les messages. Celle-ci sera progressive. Le message contiendra le nombre-tout (le total du nombre de cubes), après quelques expérimentations (les essais). Le nombre-tout semble se construire sous une nécessité forte (la réussite de la construction du train par un message sans couleurs). Le nombre devient un indice pertinent.
Le nombre fait son apparition dans les huit photographies suivantes. Elles explicitent la place et le rôle du nombre dans l'élaboration de plus en plus structurée des messages. Nous tentons ainsi de montrer l'évolution du nombre en parallèle avec l'élaboration les productions des élèves.

La photographie n° 3 montre le nombre-tout comme un indice essentiel dans l'élaboration d'un message décodable pour la construction d'un train par un élève-émetteur.

2.3.1 La somme des cubes représente le nombre

Essai 1



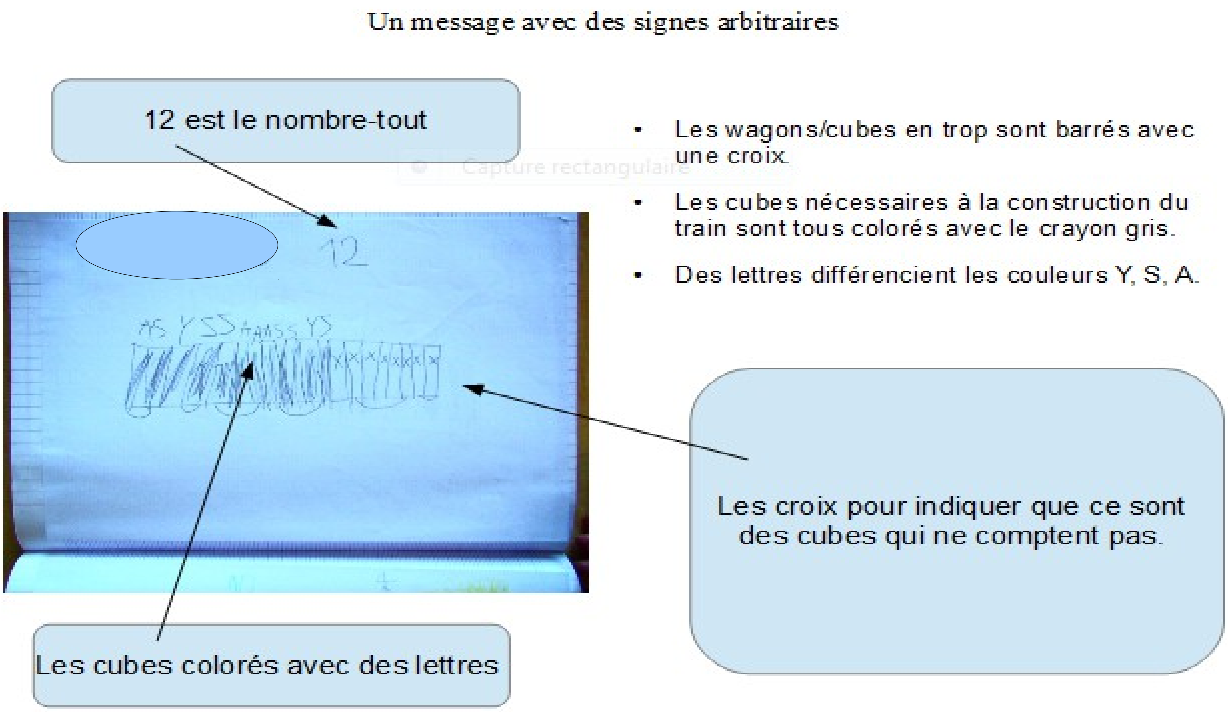
Photographie n°4 : l'importance du nombre-tout, écrit très grand dans le message
Date, septembre 2012 (première semaine de classe)

Ci-dessus, les nombres sont maintenant présents sur le message. Le nombre entouré, le plus grand, indique le nombre-tout (12), c'est-à-dire la totalité de cubes nécessaires à la réalisation de la construction du train. Les nombres 1 et 2 codent une quantité définie par la couleur du cube. Nous remarquons une tentative de codage pour indiquer la couleur des cubes avec des formes (carrés, triangles, cercles et cases entièrement noircies). Il n'y a pas de légende associée à ce codage, ce qui rend le message difficilement déchiffrage par l'élève-récepteur, malgré la présence de nombres. Le train construit par l'élève-récepteur ne sera pas conforme à la réalisation d'origine avec ce message.

Nous présentons une seconde photographie qui semble montrer, elle aussi, la nécessité du nombre-tout. L'élève a bien écrit 12 pour signifier 12 cubes. L'élève semble être confronté à un obstacle. Il a précisé le nombre-tout mais il cherche à dire aussi que tous les cubes ne sont pas de la même couleur. Comment rendre « lisible » pour l'élève-récepteur que tous les cubes n'ont pas la même couleur ? L'élève, sans la couleur, écrit des symboles (des lettres) dans une tentative de différenciation des couleurs de cubes utilisées pour la construction future du train.
Les productions suivantes vont référer à différents statuts du nombre. Nous présentons plusieurs trois photographies, trois tentatives (essais) de codage sans couleurs par des procédés différents.

2.3.2 La somme des cubes, connaissance importante mais non suffisante

Essai 1



Photographie n°5 : Des signes arbitraires, les lettres
Date, septembre 2012 (deuxième semaine de classe)

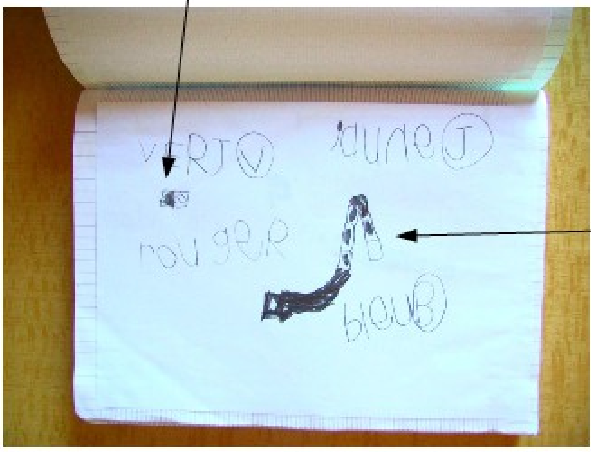
Les lettres Y, S et A indiquent ci-dessus les couleurs différentes pour les cubes nécessaires à la construction du train. Pourtant l'élève-récepteur ne sait pas à quoi « raccrocher » les lettres. Il ne dispose pas de la référence qui permettrait de relier la lettre et la couleur précise du cube. Il ne possède pas le modèle de l'élève-récepteur. La train réalisé par l'élève-récepteur n'est pas conforme avec ce message.

Essai 2

Une autre production avec une tentative de codage lorsque l'élève est toujours privé de la couleur.

Le milieu évolue, l'élève « privé » de couleurs pour le message

Un essai de légende du codage en noir et blanc



- Tentative de codage par l'initiale de la couleur : J pour jaune, B pour bleu ...
- Différenciation des cubes par un coloriage en noir et blanc ...

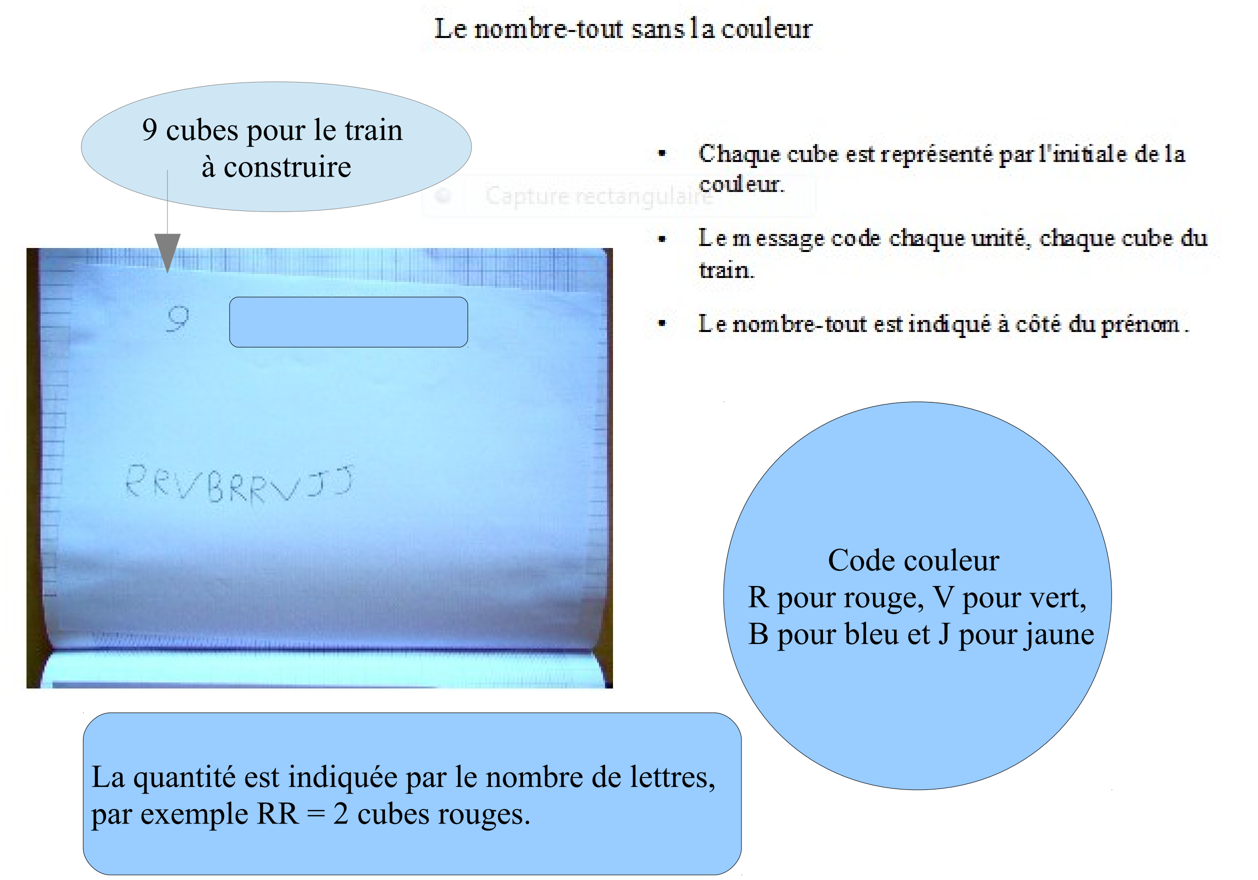
Tentative de codage :
*carré noir et point blanc,
*carré noir,
*carré blanc et point noir,
*carré blanc.
Ce codage représente les 4 couleurs : vert, jaune, rouge et bleu.

Photographie n°6 : double tentative de codage
Date, septembre 2012 (deuxième semaine de classe)

Le travail montre un codage directement sur le dessin même du train. L'élève cherche à mettre de la couleur et colorie les cases en noir et de blanc, de quatre manières différentes puisque le train comporte quatre couleurs. De plus, l'élève cherche aussi à utiliser le nom des couleurs. Nous observons que le nom des quatre couleurs des cubes nécessaire à la construction du train est indiqué sur le message. L'initiale du nom de la couleur est entourée mais il n'y a pas de lien entre le codage en noir et blanc des cubes et la couleur choisie d'être indiquée par ce codage (vert, jaune, rouge et bleu).

Essai 3

La photographie 6, quant à elle, montre un codage réussi par la présence du nombre-tout qui indique la totalité de cubes. L'élève précise la couleur du cube par l'initiale. La quantité est « dite » par le nombre de lettres. Lorsque celle-ci est doublée, cela indique deux cubes. La représentation du message évolue, l'élève désigne les cubes par l'initiale de la couleur et ne dessine plus un rond ou un carré.



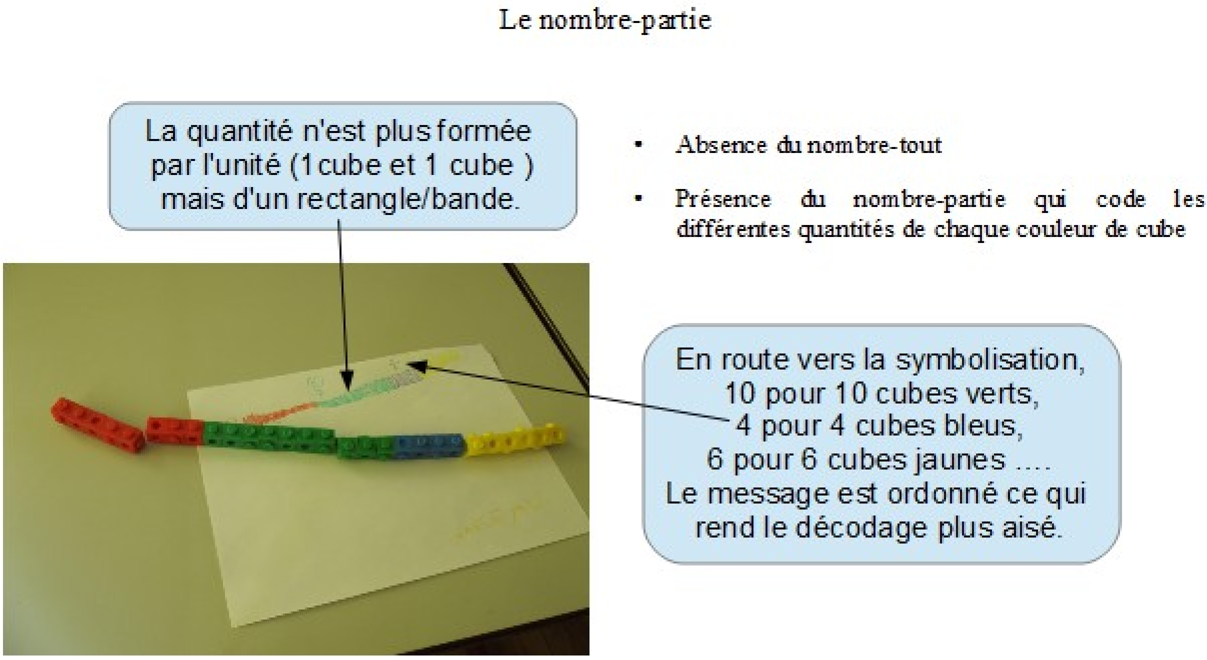
Photographie n° 7 : la quantité par le nombre de lettres écrite sur le message
Date, septembre 2012

Lors de la toute première mise en œuvre, lorsque l'élève est confronté à la situation d'écrire un message, il existe différents temps de réactions. Le temps 1 (l'élève-émetteur doit écrire un message pour l'élève-récepteur dont l'enjeu est la construction d'un train identique au modèle) correspond à un grand étonnement de toute la classe. Celle-ci doute. Les élèves se regardent et cherchent « à lire » sur les visages des camarades la même incertitude. En temps 2, certains élèves commencent à réagir et rappellent au professeur qu'ils ne savent pas encore écrire et lire mais ils se « lancent ». Ils ont les crayons de couleurs et écrivent des signes sur la feuille (un message). Les messages ne fonctionnent pas forcément. Le temps 3, quant à lui, marque le temps des premières tentatives davantage structurées. Certains élèves « dessinent » un message. C'est le temps du « dessin du train » (le dessin est schématisé par des traits, des ronds, ou des carrés) qui représente le nombre total de cubes et l'ordinalité qui compose le train. Il existe encore des élèves dans l'incapacité « d'écrire » un message pour l'élève-récepteur. Ce dernier ne pourra construire un train. Le rôle du professeur n'est pas de dire ou montrer comment rédiger un message avec les éléments essentiels qui garantiraient la construction du train. Il cherche plutôt, à partir des messages erronés, à permettre l'évolution des connaissances mathématiques sur le nombre, qui pourront/auront des incidences sur les messages. Ce travail se construit lentement autour des échanges sur le savoir entre l'élève, le professeur et le savoir. Ce sont les premières représentations erronées qui favorisent les échanges entres les élèves comme nous tentons de le montrer. Les élèves mènent plusieurs enquêtes : l'enquête mathématique mais également l'enquête sur la rédaction des messages afin de formuler et/ou d'argumenter sur les différents critères (Pourquoi tel message fonctionne ?)

Les représentations des trains des élèves dans les messages ne devaient pas être une reproduction de l'image d'un train imaginé avec une locomotive, une cheminée, des compartiments avec des fenêtres et des rails. Le professeur a pris conscience du « danger » lorsque des élèves commençaient à tracer les contours d'une locomotive avec une cheminée et de la fumée. Il a arrêté la classe pour préciser que le dessin du train n'était pas l'essentiel. Il a surenchéri sur le commentaire d'un élève qu'il disait qu'il ne savait ne pas savoir dessiner les trains parce que cela était trop dur. Et pour contraindre encore la réalisation de productions très schématisées, le professeur a prévenu que le temps pour le codage du message était limité.

2.3.3 Le statut du nombre-tout

La comparaison des trains, c'est-à-dire la comparaison entre le train-modèle et le train-construit permet la validation du message. Beaucoup de trains sont alors non conformes même avec l'information du nombre-tout. Les élèves s'interrogent. Les trains ont effectivement la même « taille », mais ils ne sont pas identiques. D'où pourrait venir le problème puisque l'information du nombre de cubes nécessaires à la construction du train est écrit sur le message ? Comment faire ? L'élève prend conscience que le nombre de cubes de chaque couleur est un indice important sans que le professeur ne communique l'information. Le nombre total ne représente pas toujours la même chose ? Rien n'est dit mais la nombre désigne parfois un ensemble et/ou une partie. L'élève perçoit que d'autres nombres sont nécessaires au codage/décodage d'un message conforme. Le nombre-partie permet, quant à lui, de représenter chaque quantité associée à une couleur. Une photographie montre un message avec des nombres-parties qui indiquent la quantité de cubes pour chaque couleur. Mais le nombre-tout est absent sur ce message. La compréhension du nombre se cherche et s'élabore mais chaque nouvelle connaissance se heurte et se construit avec la connaissance ancienne (précédente). Maintenant, l'élève va travailler directement dans le Journal du Nombre en se donnant des problèmes à lui-même. Il possède des connaissances sur les différents statuts du nombre. Il construit un train avec un nombre de cubes inférieur à dix qu'il dessine dans le journal du Nombre avec le message correspondant. L'élève se déplace pour prendre les cubes posés dans un endroit pour chacune des couleurs (par exemple, les cubes rouges sur le plateau rouge près du tableau). L'élève peut aussi écrire le message et dessiner ensuite le train correspondant puis fabriquer ce dernier (le train avec les cubes de quatre couleurs comme validation à partir du message).



Photographie 8 : le nombre-partie

Date, septembre 2012

2.3.4 Le nombre-partie

Essai 1

Le nombre est présent sur le message pour indiquer la quantité de cubes de chaque couleur. Le dessin montre quatre assemblages de cubes de quantité variable mais de la même couleur. La lisibilité du message est en jeu. Les cubes d'une même couleur forment une bande/un groupe/une partie. L'élève assure le déchiffrement par l'indication du nombre pour chacune des 4 couleurs avec un groupement qui varie. Le nombre-tout n'est pas écrit. Il semblerait qu'à côté de la perception du nombre comme une suite d'éléments des premières productions, se construisent d'autres représentations du nombre comme le nombre dans sa globalité mais aussi le nombre et les compléments. Nous pensons qu'à l'entrée du cours préparatoire, les élèves maîtrisent pour certains d'entre eux le « comment calculer » ou tout au moins le « comment numéroter ». Ils récitent la comptine numérique et ce comptage-numérotage peut aller assez loin. Avec les explorations menées dans les différents modules, les différentes représentations vont donc cohabiter et se compléter.

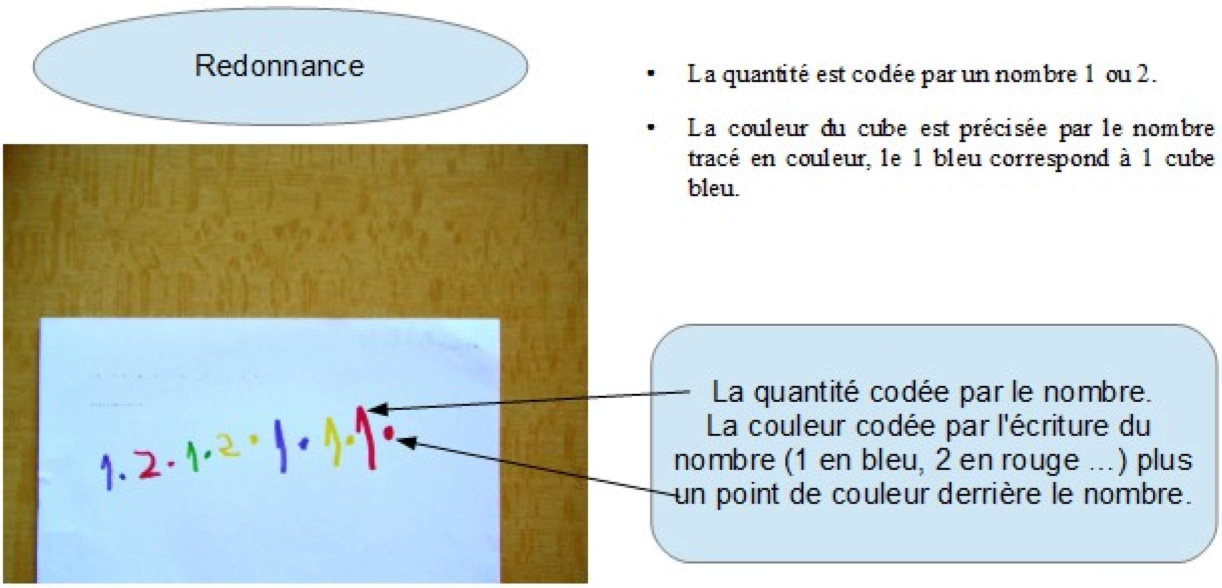
Ainsi, lors de la mise en œuvre de la situation des trains c'est-à-dire lors le module 0, les élèves vont commencer à élaborer le « pourquoi calculer ». Ce questionnement ne se produira pas en phase 1. La rédaction de messages pour des élèves récepteurs-constructeurs comportera des nombres lorsque l'élève ne pourra plus dessiner. Cela provoquera chez les élèves une interrogation sur « *le pourquoi* » utiliser le nombre. Ils commenceront à explorer les différents usages du nombre.

Le nombre se construit comme la mémoire d'une quantité, la quantité pouvant représenter la totalité du nombre et/ou les nombres-parties. Par exemple, nous sélectionnons des messages avec plusieurs codages. Ceux-ci peuvent comprendre parfois une abondance de signes, comme la production du message avec le tracé du nombre en couleur et doublé par l'initiale de la couleur. L'élève s'essaie à l'écriture de messages sans le dessin.

Essai 2

La production suivante pourrait peut-être indiquer que l'élève commence à regrouper le nombre et la quantité qu'il représente. L'élève trace les nombres de la couleur du cube. Il dessine un petit point comme pour dire, « c'est 2 de quelque chose/de la couleur », en fait, c'est deux cubes rouges.

Un message avec des nombres et des couleurs

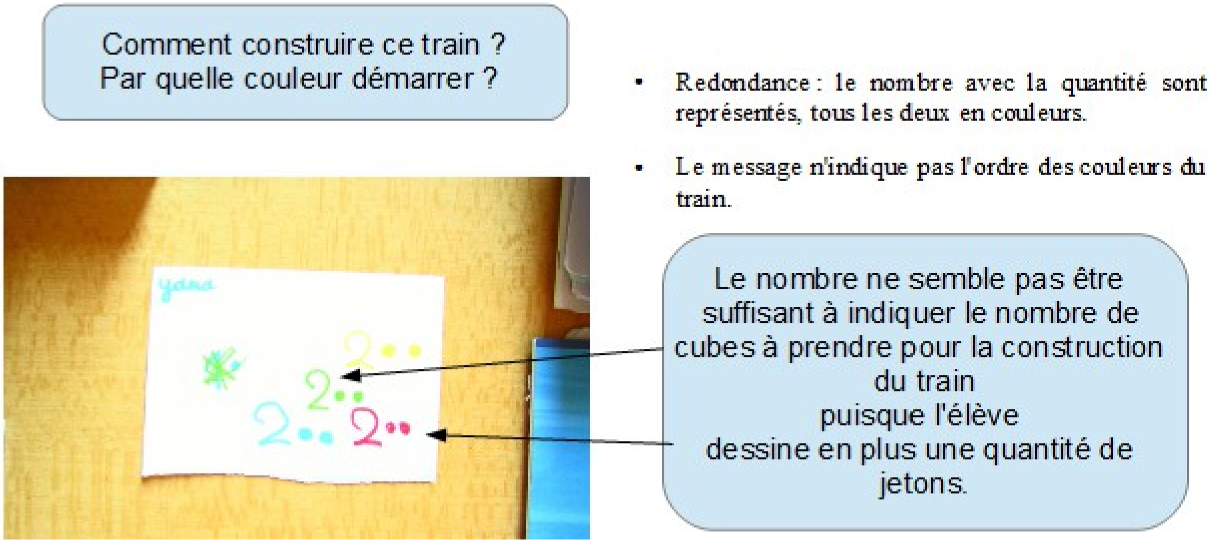


Photographie n°9 : les nombres en couleur
Date, septembre 2012

Le nombre de cubes pour la construction du train est souvent inférieur à dix cubes. Le nombre de chaque couleur de cube ne dépasse pas 3 cubes.
Il nous semble que ce sont la confrontation avec des constructions, en particullier les trains réalisés non conformes, qui amène à s'interroger puis étudier en profondeur la « nature » du message. L'élève se demande ce qui nuit à l'élaboration d'un train identique au modèle. Il constate que cela ne fonctionne pas. Il recherche et ajoute des nombres mais cela ne va toujours pas. L'enquête continue. Comme le nombre peut représenter à la fois le nombre de cubes nécessaire pour la construction totale mais aussi le nombre de cubes d'une même couleur, l'élève s'interroge sur ce que représente le nombre (les différents statuts du nombre).

Essai 3

Le nombre et la quantité



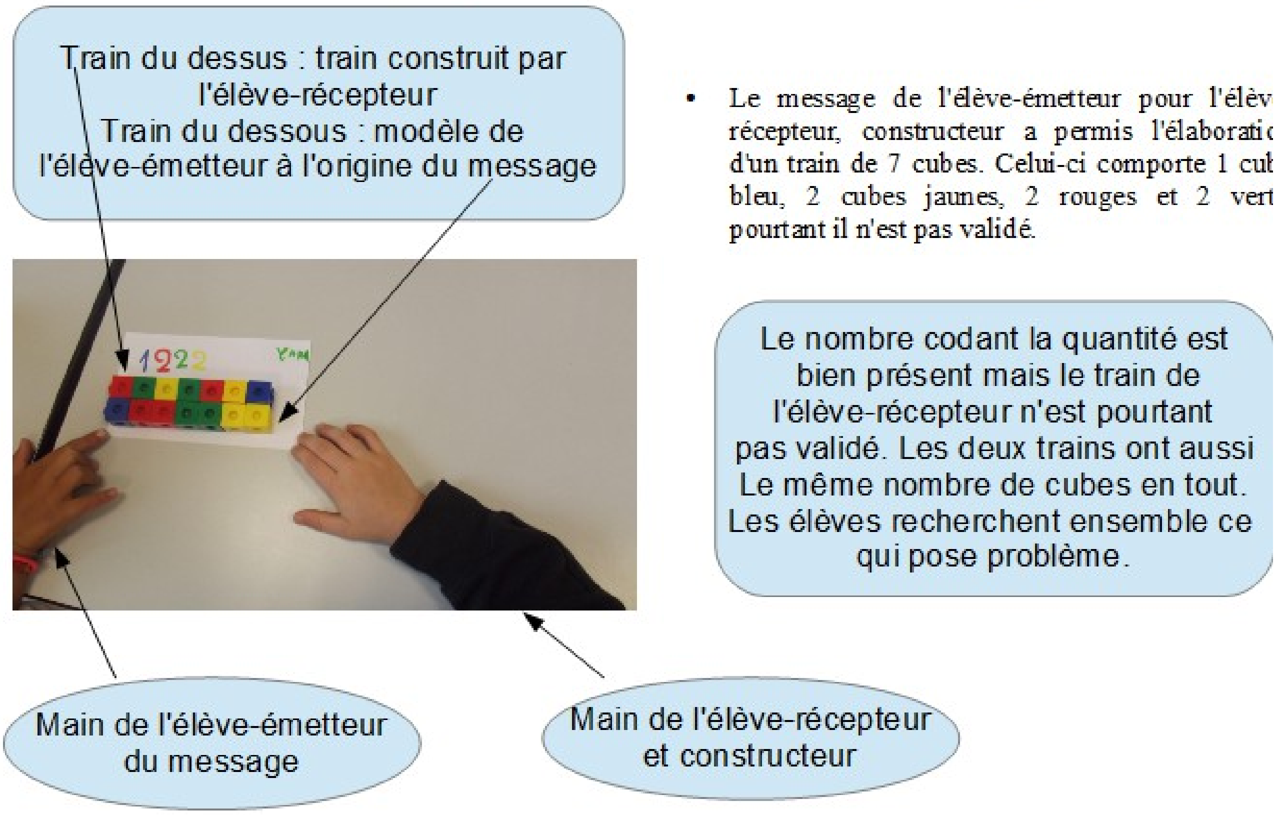
Photographie n°10 : des nombres et des quantités
Date, le septembre 2012

Le message n'est toujours pas valable puisque l'élève, même en respectant, les couleurs et le nombre qui représentent la quantité de cubes de chaque couleur. Le message ne précise pas l'ordinalité. L'élève-récepteur comprend parfaitement que le train est constitué de huit cubes, même si la somme n'est pas inscrite (elle n'est pas indispensable). Le train se compose de deux cubes bleus, deux cubes rouges, deux cubes verts et deux cubes jaunes. Le problème est l'ordonnance des couleurs (et l'ordonnance de la suite des couleurs) avec la couleur de départ.

2.4 La phase de validation

La photographie ci-dessous appartient à la phase de validation entre l'élève-émetteur et l'élève-récepteur.

La validation, après la construction du train suivant le message



Photographie 11 : échanges autour de la validation
Date, septembre 2012

Les élèves échangent. La validation est immédiate. Il suffit d'un regard. Les deux trains ne sont pas identiques. Ils ont des similitudes comme les mêmes couleurs présentes dans les deux trains et le même nombre de cubes par couleur. Les deux trains ont aussi la même « taille » mais ils sont radicalement différents. Les élèves recherchent en quoi. Ils caractérisent les différences et pour cela, ils font un retour au message. Ils font des aller-retour du message aux constructions. Il est nécessaire de comprendre pourquoi le message ne convient pas ?

2.4.1 Retour sur la conception des messages

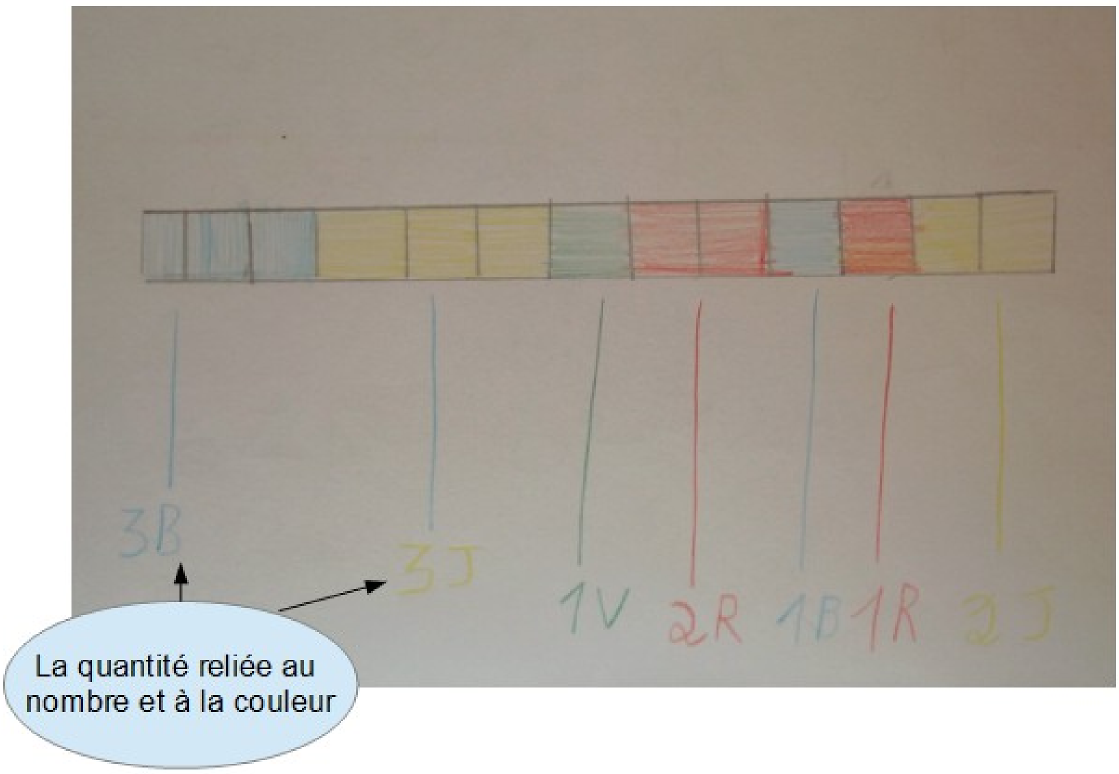
Le nombre va faire son apparition comme un moyen efficace d'émettre des messages dans l'élaboration des trains, par une prise de conscience des élèves que le nombre désigne et possède des statuts différents. Ils codent différentes représentations.

Nous montrons une photographie de trains. Ils sont dessinés par un élève avec le message correspondant. Ici, le « Journal du Nombre » nous semble particulièrement intéressant parce que l'élève gère la compréhension de la « structure du train » aussi bien dans le sens horizontal que vertical. Le Journal du Nombre (l'espace feuille) oriente en sorte le message, parfois l'élève pense que le message est erroné mais le train et le message sont simplement inversés. Ici, l'élève semble avoir résolu la problématique de la véracité du message malgré l'orientation du message ou du train. L'élève a écrit des messages avec des nombres. Il a représenté alors le train correspondant au message. Inversement, il a « dessiné » le train et réalisé le codage du message. Ce travail dans le Journal du Nombre, par l'utilisation de la gestion de la page du cahier, dans le sens de la hauteur ou de la largeur, a fait prendre conscience de la validité et de la permanence du message en lien avec la représentation choisie. Nous faisons l'hypothèse que la représentation devrait aider à penser la structure du problème sans un enferment dans un mode de représentation. La photographie n° 12 semble montrer la compréhension de la permanence d'un message.

Essai 1

Considérons maintenant un autre travail dans le Journal du Nombre sur la situation des trains et la réalisation de messages. L'élève relie l'expérience (la construction du train avec les cubes) au dessin du train (carrés de couleurs). Il attache par un trait le nombre avec la lettre du nom de la couleur à la quantité. Le codage est doublé puisque le message est écrit en couleur 3 B, le nombre 3 et la lettre B sont écrits en bleu.

Un train et un message en correspondance « terme à terme »

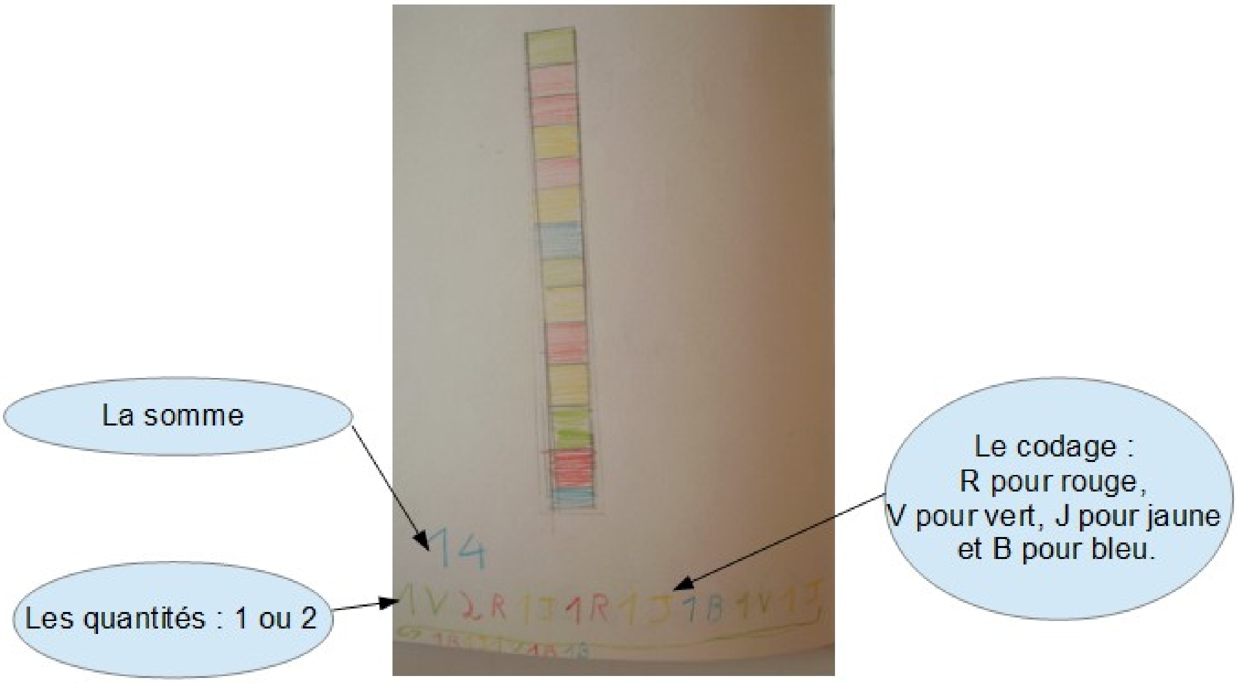


Photographie n° 12 : un train et un message (Journal d'Jean-Louis C)
Date, septembre 2012

L'élève explore les petits nombres qu'il raccroche à une quantité de cubes et à une couleur. Le message est la traduction de l'expérience, selon nous, puisque l'élève trace des liens de couleurs qui relient le train dessiné et le message. Ce même élève dessine dans le Journal du nombre, un autre train et un autre message.

Essai 2

Un train/tour, la représentation est à la verticale et le codage du message de haut en bas



Photographie n° 13 : un train/tour (Journal d'Jean-Louis C)
Date, septembre 2012

Ce type de message a provoqué un travail autour de la permanence du message. Il dépend de l'orientation de la lecture du message et/ou de celle du train. Cela a amené une exploration spécifique des expressions, : « c'est pareil mais c'est l'inverse », « c'est presque pareil... », « le train est à l'envers … mais si on le tourne, c'est pareil … »

2.4.2 Les parties fictives

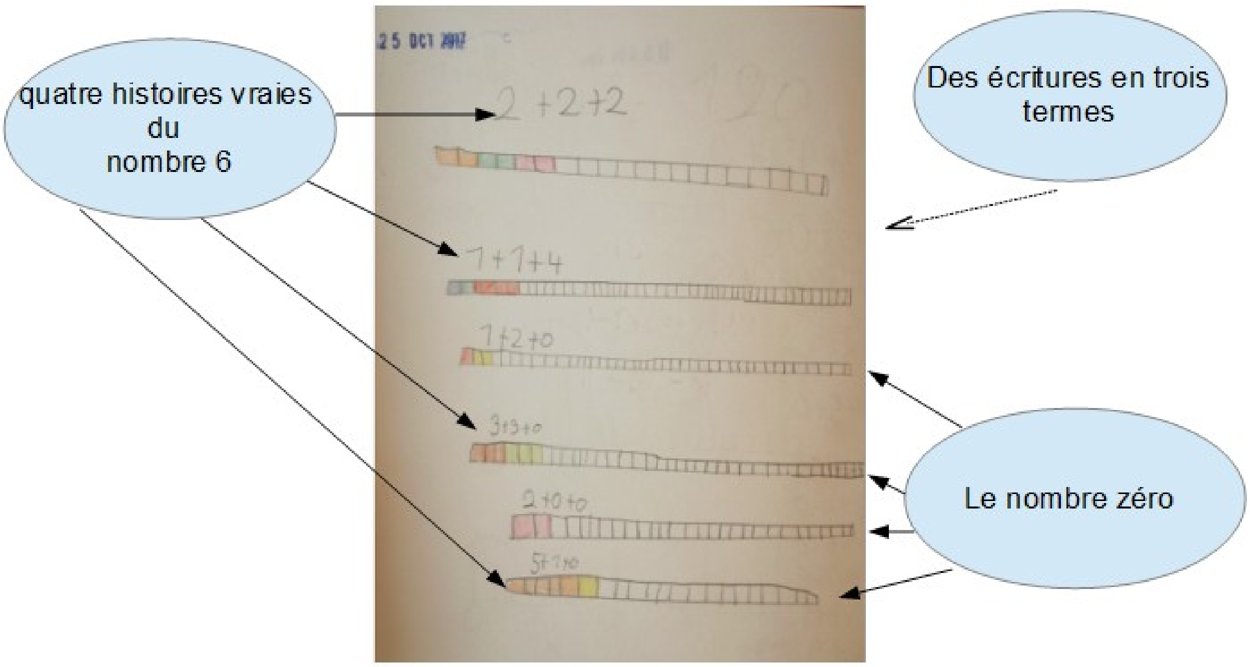
Un autre dispositif de la recherche ACE concerne les parties fictives. Ce sont des parties dont l'enjeu est de faire partager par tous les élèves les connaissances (les cas particuliers, les limites) que la situation contient mais que les élèves pourraient ne pas avoir rencontrées lors des parties de jeu. Les parties fictives permettent aussi comme le Journal du Nombre, la diffusion par un retour sur l'expérience et une avancée du temps didactique. Nous pourrions peut-être dire que les parties fictives permettent une institutionnalisation des connaissances en appui sur les connaissances de la classe (il s'agit d'une enquête/étude collective). Ce sont deux outils nécessaires à l'avancée du temps didactique mais de deux temps différents. Avec le Journal du Nombre, l'élève travaille/étudie dans sa propre temporalité. Avec les parties fictives, l'élève travaille/étudie dans l'avancée du temps des savoirs de la classe. Parfois, ce sont les enquêtes réalisées lors des parties fictives qui sont reprisent pas les élèves dans le Journal du Nombre comme pour s'approprier encore mieux le savoir en jeu.

2.4.3 Le travail spécifique dans le Journal du Nombre

Nous présentons une des premières productions réalisées dans le Journal du Nombre.

Essai 1

Le choix de la recherche ACE de l'élaboration du nombre de l'entrée par les décompositions



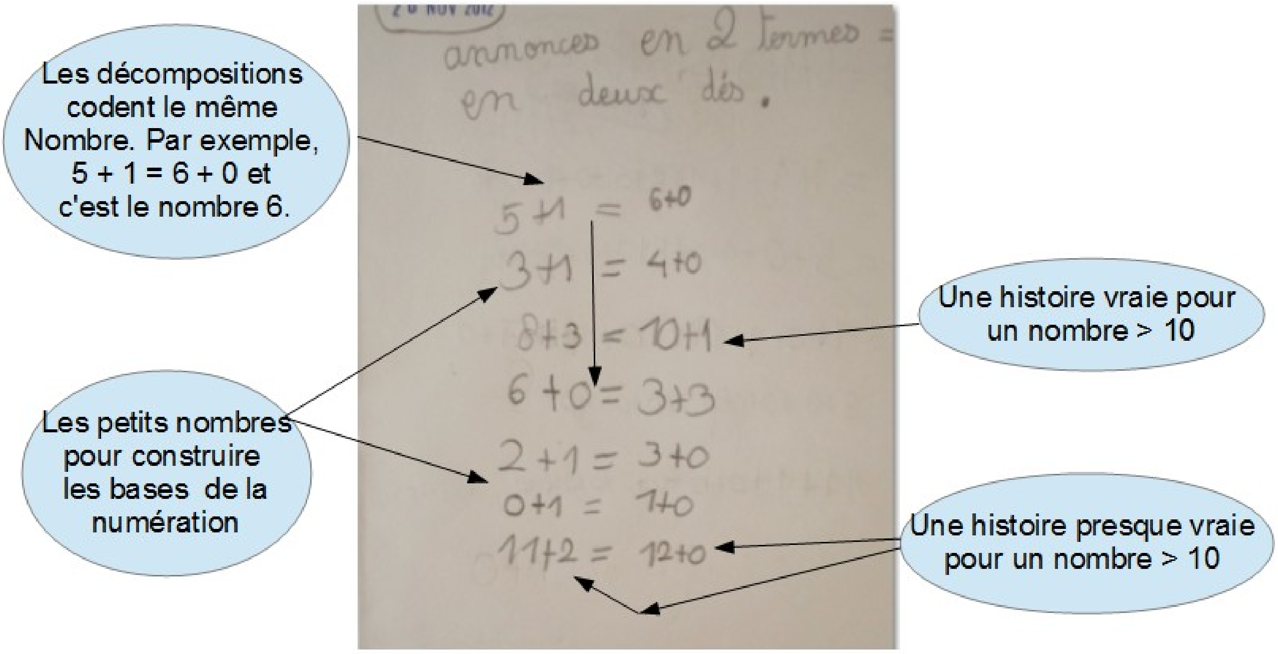
Photographie n°14 : Les annonces en trois termes dans le Journal du Nombre
Date, le 25 octobre 2012

Nous formulons maintenant des hypothèses sur le rôle spécifique du Journal du nombre dans l'élaboration du nombre par l'élève. Nous rappelons l'enjeu d'autonomie qui consiste à rendre l'élève producteur des problèmes qu'il se donne à lui-même. Nous pensons fortement que le Journal du Nombre peut permettre une « étude distanciée » des connaissances apportées/découvertes lors de l'exploration des situations à partir du matériel des cubes et/ou du jeu des annonces « Dé et doigts » (pour les exemples référencés ci-dessous). L'élève, par ce retour dans le passé, procède à un « travail de fouilles » des mises en situation des différents modules. Il « revient » sur les connaissances naissantes et issues de l'expérience directe. Lors des mises à jour, les connaissances semblent se solidifier par les répétitions de l'exploration dans les différentes phases de jeu (aux contraintes évolutives). Avec l'usage du Journal du Nombre, nous pensons que les connaissances de l'élève pourraient se consolider par une enquête/étude spécifique. En fait, ce

temps est un « temps de retour » personnel sur les expériences de chaque élève. L'élève met à distance les temps de jeu et de gain (annonce gagnante) pour poursuivre l'enquête. Il s'oriente vers un gain plus symbolique (plus de connaissances mathématiques). Cette enquête/recherche d'un gain nouveau peut/doit garantir la certitude de gagner encore plus souvent au jeu des annonces. Pour cela, le savoir doit être stabilisé pour évoluer encore. Sans le temps de mise à distance, les parties de jeu apporteraient toutefois des connaissances par la répétition (la présence de plusieurs parties dans un même module) mais la particularité de ces connaissances sont leur « inscription » dans la situation. Ce sont des situations fortement « attachées » à la situation. Elles « dépendent » de la situation. Elles vivent et évoluent avec et dans la situation. Nous pensons qu'un savoir stabilisé pour être disponible en toute circonstance doit subir une réactualisation et une organisation des connaissances. Pour cela, l'élève doit donc revenir et réfléchir à ce qu'il pense avoir appris. Le moyen que nous choisissons de mettre à la disposition de l'élève est l'usage fréquent du Journal du Nombre. Nous précisons que si le retour est un retour individuel, son existence est évidemment le partage. Il permet l'accroissement des connaissances. Examinons ce que semble permettre ce retour à partir de la production d'élève présentée ci-dessus (ce travail appartient au Journal du Nombre de Michelle).
L'élève inscrit/note les connaissances de l'expérience directe du jeu mais si l'élève sait/connait que 2 + 2 + 2 c'est 6, il n'a pas nécessairement pris le temps de mettre en relation cette connaissance avec les autres connaissances qu'il possède sur le nombre 6. Il est réalisé avec le jeu des annonces lors de la contrainte des trois mains. Une équipe de trois élèves s'entend pour annoncer un nombre et le montrer en posant chacun une et une seule main sur la table. Que nous apprend le travail de l'élève ?
A chaque fois, les trains dessinés sont un long train bien supérieur à trois mains (5 + 5 + 5). L'élève ne tient pas compte de la contrainte des trois mains pour la structure (la longueur global) du train. Par contre, elle utilise la contrainte du dé pour les décompositions et notamment les constellations de 1 à 6. L'élève a produit quatre histoires vraies du nombre 6 en trois termes (2 + 2 + 2, 1 + 1 + 4, 3 + 3 + 0, 5 + 1 + 0) et deux autres décompositions pour le nombre 3 (1 + 2 + 0) et le nombre 2 (2 + 0 + 0). Le zéro est noté une ou deux fois dans la décomposition et permet de respecter la contrainte des trois mains c'est-à-dire les trois termes. (cf. la photographie ci-dessous)

Essai 2

La production suivante est issue du même Journal du Nombre (celui de Michelle). L'élève écrit une annonce en deux termes égale à un lancer en deux termes puisque ce dernier est réalisé avec deux dés.



Photographie n° 15 : les annonces en deux termes avec deux dés
Date, le 26 octobre 2012

La production semble montrer les liens/les relations que l'élève « tisse » entre les nombres. Par exemple, le relation du « un de plus », l'élève sait/connait que 8 + 3 = 10 + 1, c'est 11 et avec « un de plus, c'est 12 ». Elle devrait donc écrire (11 + 1 = 12 + 0), hors, ce n'est pas ce qui est écrit dans le Journal du Nombre (11 + 2 = 10 + 2). Les connaissances sur les nombres inférieurs à 10 semblent très stables (les décompositions sont toutes vraies). Nous dirions que les décompositions sur les nombres supérieurs à dix sont en cours d'élaboration (la décomposition pour le nombre 11 est vraie et celle pour le nombre 12 ne l'est que partiellement). Le nombre 6, c'est 6 + 0 = 3 + 3. Le nombre 3 c'est aussi la moitié de 6 (2 + 1 = 3 + 0). L'élaboration du nombre n'est pas seulement la connaissance de la pluralité des désignations d'un même nombre mais aussi la construction des liens entre les nombres et entre les différentes désignations (les propriétés, les rapports sont inclus). Toutes les décompositions avec les petits nombres sont justes. L'élève tente une exploration parmi les nombres plus grands. Le travail sur la longue durée à partir des petits nombres ne semble pas provoquer « d'enfermement » dans les connaissances maîtrisées puisque la situation contraint l'élève à explorer un « territoire inconnu ». C'est la situation (deux dés) qui crée cela. De plus, les annonces, ici, sortent de la contrainte du groupement de cinq (un main, c'est cinq doigts)

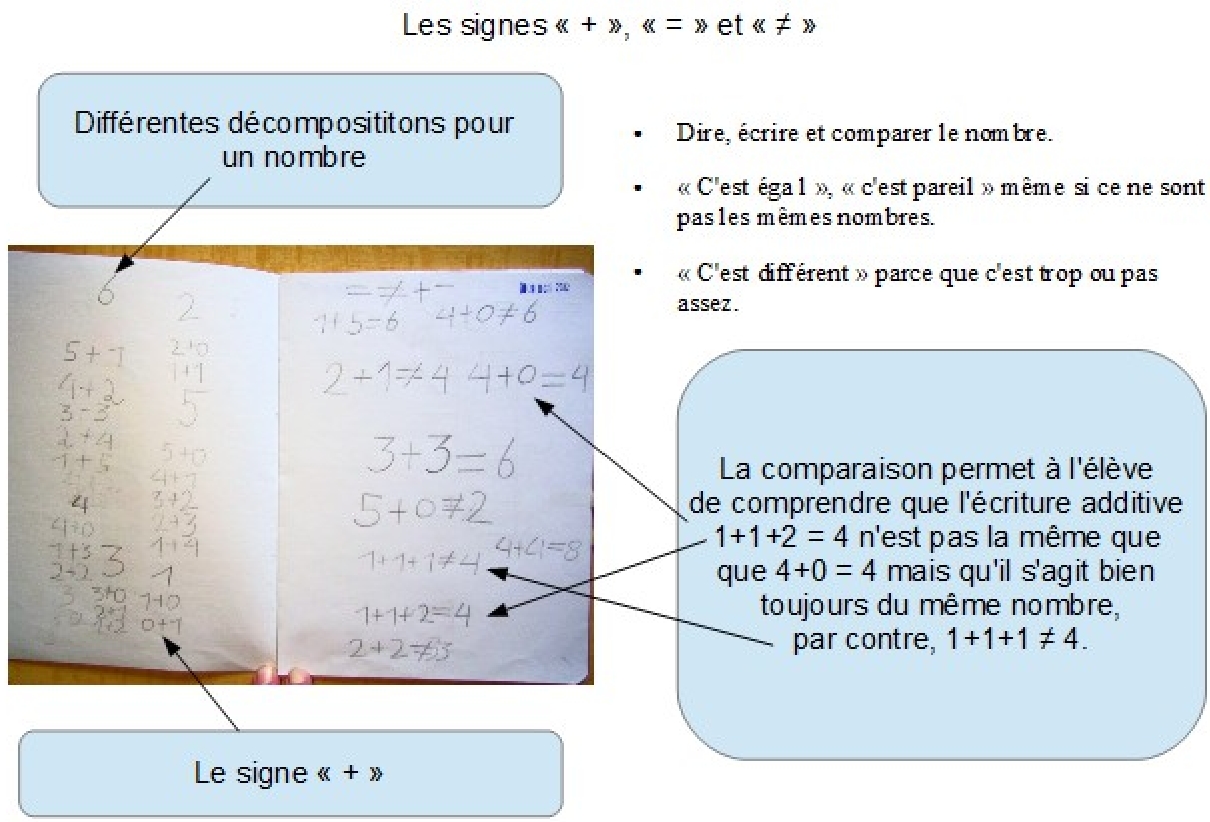
Les élèves explorent cette situation dans le Journal du Nombre et il semblerait que l'utilisation systématique du nombre par les élèves pour coder la quantité totale de cubes mais aussi la quantité de cubes de chaque couleur devient une pratique de classe. Elle permet l'écriture de messages « gagnants » (performants) parce que « conformes » aux constructions futures réalisées à partir de la lecture des messages. Les deux usages du nombre, le nombre-tout (la somme des cubes) et le nombre-partie (pour chaque couleur, le nombre de cube correspondant) se banalisent. Nous poursuivons la construction de l'arrière-plan avec les premiers modules de la recherche ACE.

2.4.4 La contrainte de l'écrit

Dans le passage systématique, propre à ACE, du travail oral au travail écrit (symbolique), une nouvelle contrainte est apparue. L'élève doit écrire l'annonce. Il peut toujours s'appuyer sur les deux mains pour « construire » la décomposition mais il faut davantage utiliser l'écrit et notamment l'écriture conventionnelle du nombre. Quelles sont les conséquences produites par la contrainte de l'écrit dans le milieu : comment jouer au jeu des annonces, « dé et doigts » sans les mains et les doigts ?
L'élève, avons-nous pensé, peut coder l'annonce prononcée. Il possède l'écriture conventionnelle des petits nombres pour réaliser cette tâche. Il continue à jouer. Il respecte la règle du jeu qui oblige à dire et montrer. A l'écrit, montrer avec les doigts devient écrire avec une décomposition additive en deux termes. Pourtant, comment peut-il signifier qu'il s'agit pour notre exemple du nombre 2. Il lui reste à valider et prouver son gain. Comment écrire que 1 + 1 c'est 2 puisque l'élève ne peut plus montrer ni dire la relation ? Comment va-t-il prouver qu'il s'agit bien du même nombre ? Que peut-il donc faire ? Nous allons rechercher des traces, des indices qui puissent nous orienter parmi les stratégies pratiquées par l'élève afin de faire des hypothèses sur l'appropriation des signes et la compréhension du système numérique. Actuellement, nous poursuivons l'élaboration de la poursuite de l'arrière-plan commun auteur-lecteurs. Nous recherchons comment l'élève entre, aborde et négocie l'entrée dans la symbolisation par l'observation de quelques productions extraites du « Journal du Nombre ».

L'élève écrit dans le Journal du Nombre des questions mathématiques qu'il a rencontrées lors des diiférentes phases de jeu dans les différents modules. Ce travail (cf. la photographie 13 ci-dessous) nous montre un élève pour lequel le nombre n'est pas uniquement une écriture chiffrée associée à un mot-nombre.
L'enjeu de l'étude de l'égalité avec le signe « = » est de permettre un travail en profondeur sur les décompositions d'un nombre (ici, on observe un travail autour du nombre 6), avec l'exploration de la commutativité et la puissance du zéro.

Essai 1



Photographie n°16 : les décompositions
Date, 9 octobre 2012

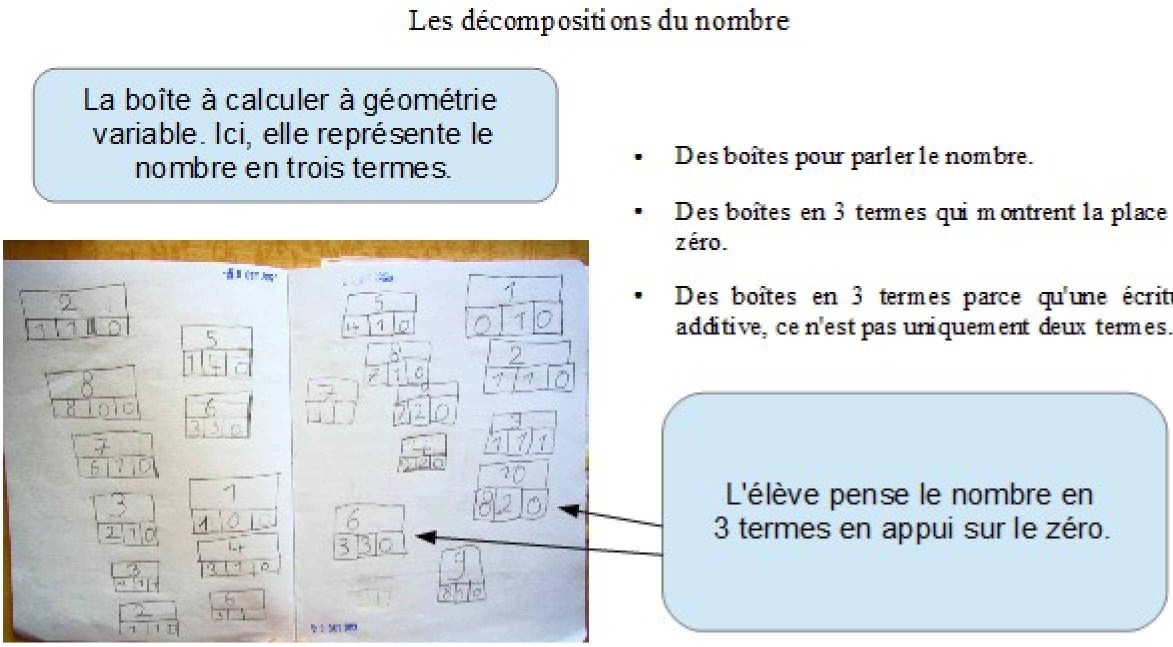
Essai 2

A partir des signes « = » et « ≠ », nous faisons l'hypothèse que l'élève peut rechercher en quoi et comment l'annonce est différente. Est-elle plus petite, plus grande ? Et de combien ? Est-il toujours nécessaire de calculer pour comparer deux écritures additives.

L'égalité est une notion importante sur laquelle se greffe de nombreuses autres notions mathématiques qui entrent en relation avec le signe « = ». L'élève étudie l'égalité de deux écritures additives en deux termes. Il rencontre donc la partition avec par exemple l'écriture 3 + 3, mais aussi la commutativité avec des écritures du type 0 + 1 = 1 + 0 et enfin, l'élément neutre avec 4 + 0 pour maintenir l'égalité entre les deux écritures additives en deux termes.

Nous allons maintenant ajouter deux autres photographies qui montrent les objets sémiotiques de la recherche ACE. Il s'agit de la *boîte à calculer* et de la *ligne graduée.* Cette dernière (la ligne graduée) évolue au fur et à mesure de la construction du nombre pour devenir une ligne sans graduation.

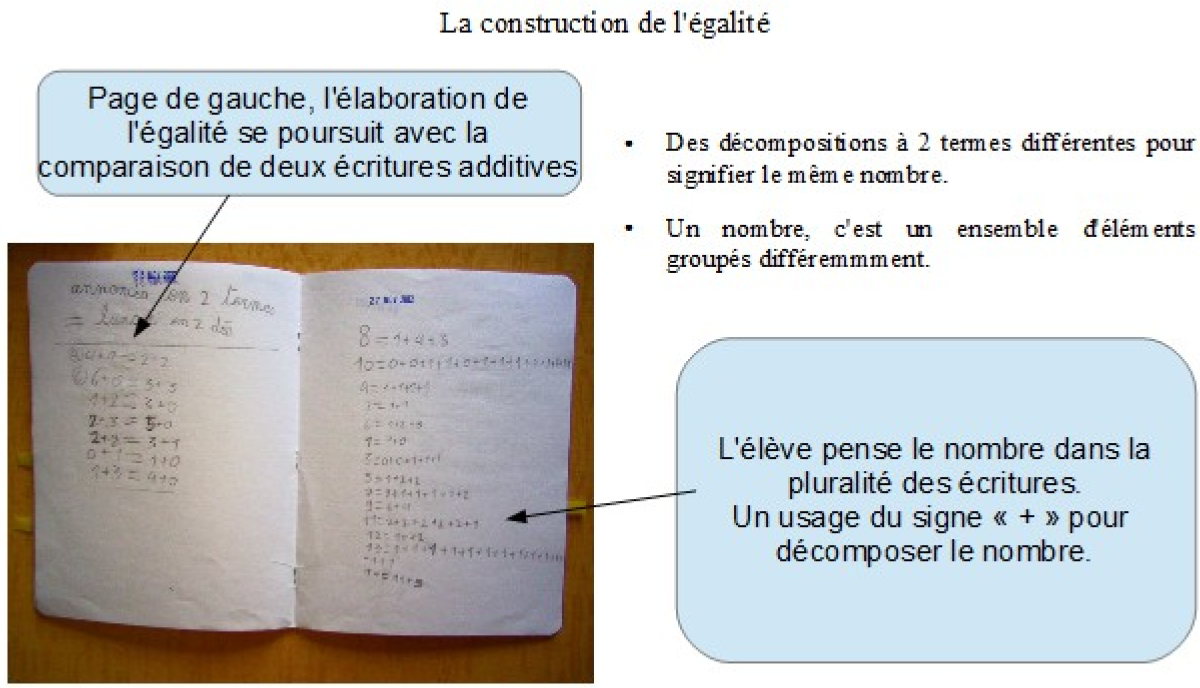
Essai 3



Photographie 17 : la boîte à calculer
Date, le 14 octobre 2012

La boîte à calculer est un autre système sémiotique. Elle se compose de deux étages, l'étage supérieur contient le nombre-tout et à l'étage inférieur les nombres-parties (la décomposition). La consigne est de penser une annonce à trois termes en complétant la boîte à calculer. Les annonces à trois termes peuvent s'émanciper du « jeu des annonces » d'où des décompositions avec les nombres 8, 10 et 7.

Essai 4

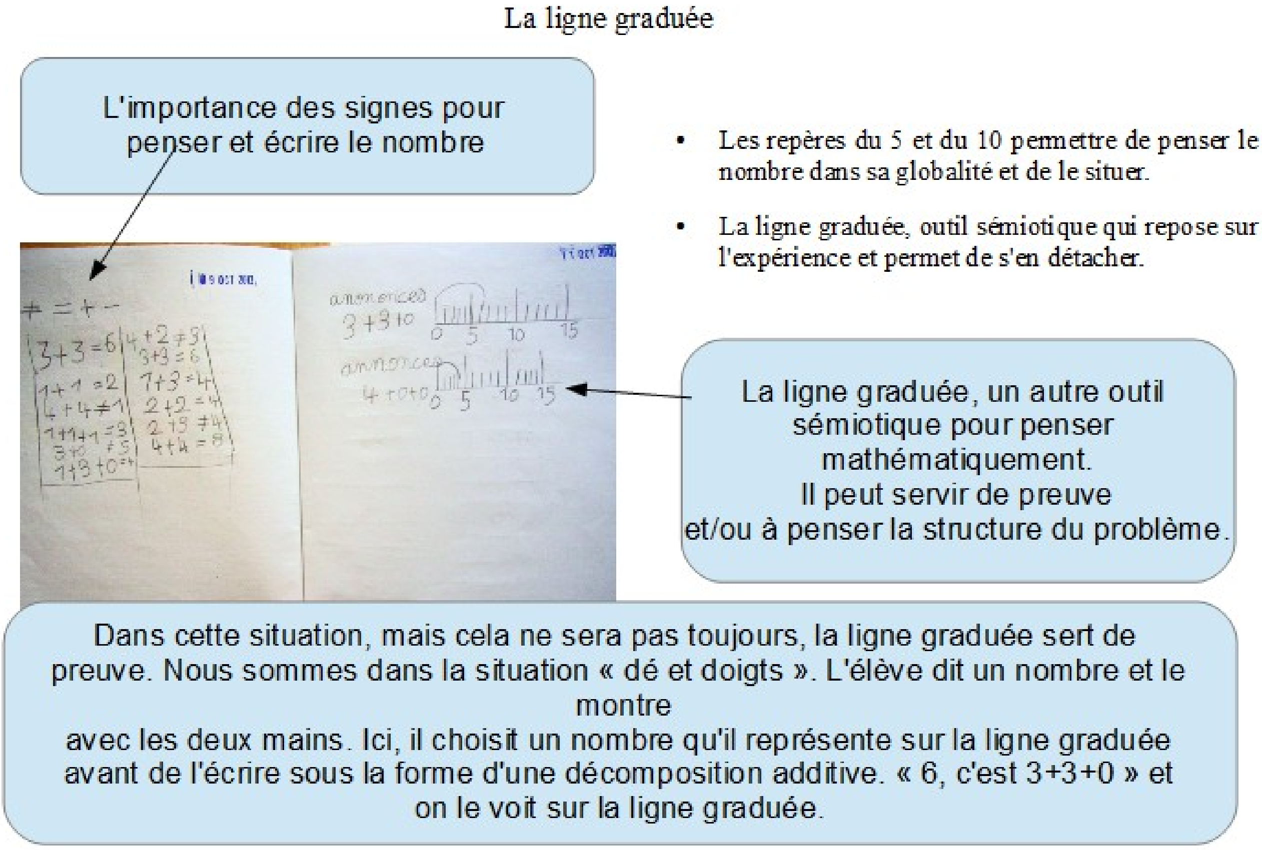


Photographie n°18 : la notion d'égalité
Date, le 27 novembre 2012

Sur le cahier de droite, l'élève use des signes mathématiques « = » et « ≠ » pour préciser le gain. Si l'annonce est égale au lancer, l'élève gagne. Si l'annonce est différente, l'élève perd. C'est un premier critère de validation qui prend appui sur la ligne graduée. Il montrerait d'après nous la construction du « savoir que », c'est-à-dire d'une connaissance déclarative. La preuve est la ligne graduée et démontre l'équivalence du nombre et de l'annonce en trois termes. Le zéro montre sa neutralité.
Sur le cahier de gauche, nous observons des annonces en trois termes. Elles sont d'un type particulier. L'élève conçoit l'annonce en trois termes à partir de l'annonce en deux termes. Il utilise le zéro comme élément neutre dont il fait varier la place dans les écritures additives. L'élève utilise ses connaissances anciennes pour construire de nouvelles connaissances.

Essai 5

Nous présentons maintenant un exemple de situation avec la ligne graduée dont le statut est double. Elle sert à représenter l'annonce en trois termes, c'est-à-dire à faire correspondre la décomposition additive (en trois termes) et le mot-nombre. Par groupe de quatre élèves, le lanceur (responsable du lancer de dé) valide l'annonce proposée par les trois élèves-annonceurs (chaque élève-annonceur utilise une et une seule main). Le trinôme a choisi un nombre et le montre à l'aide de trois mains. Puis, un élève représente l'annonce sur le journal du nombre à l'aide de la ligne graduée. Le lanceur-arbitre lance le dé. L'équipe gagne si et seulement si l'annonce est égale au lancer. On change les critères en fonction du module. La ligne graduée sert aussi de preuve pour valider le gain. La certitude mathématique est en construction. Avec l'utilisation du signe « + » pour écrire des nombres, nous remarquons que le nombre n'est plus seulement perçu comme une suite d'unités de un.

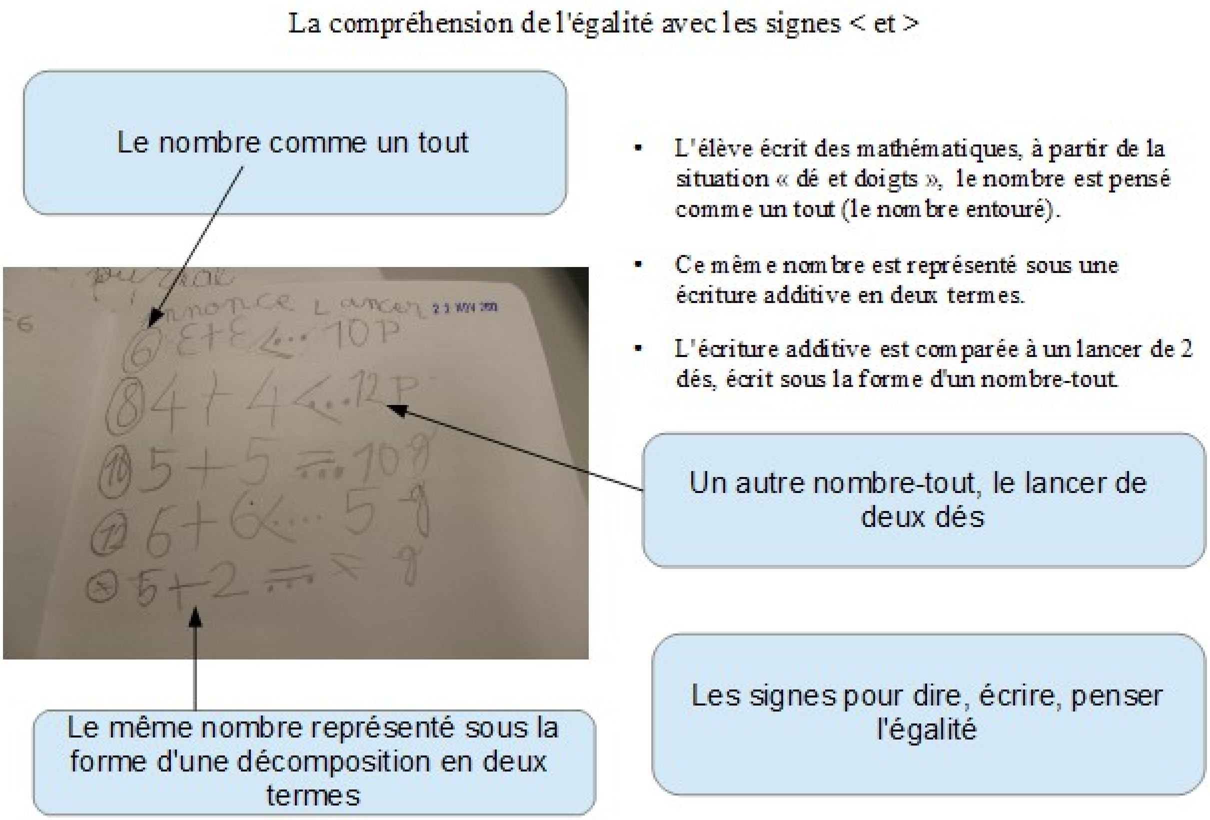


Photographie n°19 : la ligne graduée
Date, le 11 octobre 2012

Essai 7

Sur le même Journal du Nombre, nous observons la comparaison d'écritures additives. L'élève a entouré les décompositions du nombre 6. Cela qui lui permet d'user du signe « < » pour obtenir l'assurance que 3 + 3 < 10.

Nous précisons que l'année 0 correspond aux premières expérimentations dans les classes d'étude. Les séances de la progression ACE sont réalisées et modifiées si besoin. La place du Journal du Nombre dans la recherche ACE est donc pensée dès l'origine (cf. notamment Sensevy, 1996a, 1996b, 1998) comme un outil d'aide à la conceptualisation du nombre au moyen de l'enquête mathématique. Il est intégré au domaine « module *Situations*». La première mise en œuvre, sur le long terme, se déroulera pendant l'année 1, c'est-à-dire l'année scolaire 2012/2013. La seconde mise en œuvre se déroulera durant l'année 2, c'est-à-dire l'année scolaire 2013/2014.



Photographie n°20 : la comparaison
Date, le 22 novembre 2012

3. LES PREMIÈRES MISES EN OEUVRE

3.1 Les premières mises en œuvre dans la classe et les exploitations (année 1)

Il s'agit de doter les élèves d'un outil de recherche sur le nombre. Le « cahier de recherche » appelé le Journal du Nombre est un cahier pour mener des enquêtes mathématiques, comme nous l'avons précisé dans la section précédente. Deux caractéristiques du fonctionnement du Journal du Nombre sont importantes, la réussite et l'autonomie. C'est un cahier de réussite, au sens où l'élève doit « montrer » des énoncés mathématiques dont il maîtrise les conditions. L'un des enjeux est de rendre l'élève autonome et maître du temps.

Le Journal du Nombre a pris peu à peu sa place dans le travail quotidien de la classe. Son usage a demandé un temps d'adaptation. Nous retraçons brièvement cette première utilisation du Journal du Nombre. Si nous étions convaincus de l'intérêt du Journal du Nombre, il nous restait à lui donner le statut d'instrument d'enquêtes mathématiques. Puisqu'*il n'est pas* un exerciseur et qu'il sert à produire des mathématiques, il n'est donc pas un cahier de mathématiques au sens classique.

Les premières mises en œuvre lui faisaient une place *à la fin* des séances de mathématiques. Après avoir étudié un savoir mathématique, les élèves écrivaient des mathématiques dans le Journal du Nombre à partir de la « consigne » du professeur.
Les premières productions dans le Journal du Nombre trouvent leur origine dans la situation « dé et doigts ». Les élèves écrivent des annonces à deux ou trois termes avec le lancer. En fonction de la progression, les contraintes varient. Les élèves usent du nombre et des signes mathématiques comme = , ≠ , < et >. Nous étions alors confrontés à deux difficultés. La consigne contraint à étudier le savoir mathématique proposé par le professeur et uniquement celui-là. Lorsque la séance se prolonge, le travail dans le Journal du Nombre est réduit (il peut être même supprimé). Les élèves *moins avancés* ne produisent pas forcément des écritures exploitables ou encore ils produisent peu. Le temps manque pour revenir sur l'exploitation des productions d'élèves.

Nous décidons alors d'envisager quelques modifications concernant l'usage du Journal du Nombre. Il nous semble qu'il est nécessaire de favoriser un accès rapide et possible sur chaque temps de classe. Pour cela, le Journal du Nombre sera rangé dorénavant dans le casier de l'élève. Celui-ci, sur les temps informels ou autre, pourra poursuivre son enquête dans le Journal du Nombre. Par ailleurs, l'emploi du Journal du Nombre se positionne *en début de séance* comme habitude de classe. Nous pensons ainsi montrer «l'importance» du Journal du Nombre et de l'enquête.
Nous constaterons assez rapidement davantage de productions dans le Journal du Nombre. Certains élèves seront même très productifs. Quant aux élèves *moins avancés*, ils restent encore peu productifs. Ils recopient toutefois des écritures contenues sur le tableau, mais ils manquent souvent de temps. L'ensemble de la classe accepte de montrer ses productions aux autres élèves, ce qui produit certains transferts de productions. La vue de la production d'un élève amène un autre élève à écrire les mêmes mathématiques ou d'autres mathématiques qui « ressemblent un peu ». Le phénomène de contagion s'accentue davantage au troisième trimestre. Nous nous posons alors plusieurs questions : quelles sont les conditions de diffusion de cette contagion afin que tous les élèves profitent des avancées mathématiques ? Peut-on rendre les élèves *moins avancés* plus autonomes dans les productions sur le nombre dans le Journal du Nombre et comment ? Le travail collectif peut-il rendre plus fructueux les productions individuelles dans le journal du Nombre ?
Les hypothèses que nous formulons après l'année 2 sur les limites de cette première mise en œuvre, nous semblent être liées au temps. La gestion du temps doit-elle/peut-elle se dérouler autrement ?
La place du Journal du nombre doit également, nous semble-t-il devenir centrale. Le risque consisterait à lui laisser une place accessoire dans la séance ou de le transformer en cahier/fichier de mathématiques. Un vrai temps de recherche/enquête paraît important. L'usage quotidien du Journal du Nombre pourrait favoriser une telle habitude de travail.
Un second point demande une réflexion. Comment le Journal du Nombre peut-il favoriser l'enquête mathématique de tous les élèves et surtout des élèves *moins avancés* ? Quelles modalités pouvons-nous envisager pour ancrer l'apprentissage/enseignement dans les productions individuelles du Journal du Nombre en lien avec la progression ACE ?

3.2 Les secondes mises en œuvre dans la classe et les évolutions (année 2) : la production collective de l'incitation et la définition des règles du jeu

Nous souhaitons que chaque élève produise des mathématiques. Nous désirons laisser du temps afin que chaque élève s'approprie l'enquête collective et individuelle. Lors de l'entrée dans la symbolisation, nous décidons de favoriser la production collective et individuelle. Pour cela, nous faisons l'hypothèse de la nécessité de la construction d'une référence commune à tous par la mise en place de modalités spécifiques de travail dans la classe. Il s'agit du débat pour favoriser l'incitation à la production collective puis individuelle et du dispositif d'anticipation. Ces différentes modalités auront-elles un impact sur les productions des élèves *moins avancés* ?

Le Journal du Nombre et le groupe d'*anticipation* (nous allons présenter une première description de ce dispositif ci-dessous) nous semble permettre de traiter les obstacles en aval que les élèves rencontrent dans la construction du nombre. Les modalités de remédiation ou de reprise ont des avantages certains mais elles interviennent après et parfois très longtemps après la « mise en difficulté ». L'explicitation de la production collective de l'incitation sera illustrée par des séances réalisées lors de l'année 2013/2014. Nous tentons une structuration de séances réalisées et centrées autour du Journal du Nombre afin d'élaborer la construction d'un arrière-plan nécessaire, pensons-nous, au travail de nos hypothèses. Nous décrivons maintenant certaines leçons et deux sortes de structurations de l'incitation productive collective. Nous produirons ensuite une étude spécifique, au chapitre 3, de cette incitation productive collective.
La structuration 1 sera décrite ci-dessous de la manière suivante :

3.2.1 Structuration 1, la production collective de l'incitation avec la définition des règles du jeu

Les élèves sont à leur place et le professeur est placé devant la classe près du tableau. Les journaux du nombre ne sont pas distribués. Il s'agit de lancer un débat autour d'une écriture mathématique. La discussion collective doit alimenter les productions individuelles dans le journal du nombre lors de la phase suivante, le travail individuel. Ce travail comprend plusieurs phases.
La phase 1 correspond à l'ouverture du débat dans la classe autour du savoir mathématique. Il s'agit de construire une référence pour tous, à l'intérieur de laquelle chacun pourra travailler et étudier. Ce temps construit l'entente autour du savoir par la construction d'une production collective. Cette production est le résultat de l'analyse collective des premières propositions des élèves. Elle est l'étude menée à partir des échanges autour d'un savoir. Le savoir n'est pas formalisé. Les élèves, par la discussion, en précisent les contours. Chaque élève, par sa participation, peut et doit faire évoluer cette construction collective. Ensuite, celle-ci restera visible comme le témoin du travail accompli ensemble et à poursuivre individuellement. La trace écrite est la mémoire de la classe.
Donnons un exemple de ce travail.
Ce matin, le professeur propose aux élèves de choisir un nombre. Le nombre sept est sélectionné. Au tableau, le professeur écrit le nombre 7 suivi du signe « = ». Les élèves sont rapides et font des propositions orales comme 4 + 3 parce que « 4 + 3, c'est 7 » ou bien encore « c'est égal à 7 ». Le professeur propose alors à un élève de venir au tableau écrire sa proposition. Il reste au groupe à valider l'écriture notée au tableau. Le professeur renvoie donc cette validation au groupe-classe. Les élèves acquiescent. Maintenant, c'est au tour d'un second élève. Il poursuit le travail commencé.
Le travail prévu par le professeur consistait à produire des écritures additives à plusieurs termes et à montrer les équivalences. Le second élève va accrocher sa proposition à la première écriture additive. Il utilise alors un signe mathématique différent de celui de la première écriture additive. Il emploie pour cela le signe « - ». Sur le tableau, l'écriture notée est la suivante, 7 = 4 + 3 = 8 – 1. Ce temps correspond au temps de l'incitation productive collective décrit dans le chapitre 3. Nous répétons que le professeur cherche à élaborer une production conjointe, « alimentée » par les

propositions des différents élèves. Le professeur choisit de faire évoluer l'enquête d'un statut générique à un statut spécifique. Pour cela, il est nécessaire que la production réalisée au tableau se poursuive avec le choix/la proposition d'un élève. Ce dernier vient au tableau et il prend la main sur le déroulement de l'enquête par la proposition émise (l'écriture d'une décomposition du nombre sept). L'enquête devient réellement spécifique puisqu'elle est dépendante des connaissances des élèves présents dans la classe à un temps donné.

3.2.2 Le débat

L'écriture avec les signes « + » et « - » et deux « = » nourrit le débat. Les élèves explorent certaines questions. La première réaction est en rapport avec l'écriture 8 – 1. Richard, élève *moins avancé* et participant au groupe d'anticipation rejette cette écriture. Il précise que cela fait 9. Un nombre important d'élèves paraît être d'accord avec lui. Christophe, élève *avancé* affirme quant à lui que cela fait 7 parce qu'il ne s'agit pas du même signe mathématique. Une autre élève, Anne, confirme. « Ce n'est pas 9 parce que tu n'as pas plus ». Elle tente de procéder à une démonstration et parle de moins et d'enlever. Nous avons recours aux doigts. Nous convoquons le jeu des annonces pour comparer ce qui est pareil et ce qui est différent. Un élève montre 8 doigts, le second élève montre un doigt. Nous nous accordons sur le nombre 7. Mais Richard n'est toujours pas d'accord. Et cette fois-ci, le désaccord porte sur la présence de deux signes « = ». La question est renvoyée au groupe. Les élèves s'interrogent. Au début, la majorité de la classe semble invalider l'écriture avec deux signes « = » comme une écriture impossible parce que jamais vue. Les élèves observent. Puis un changement d'appréciation se produit. Les élèves approuvent puisque « c'est possible parce que c'est toujours égal à 7 ».

3.2.3 La construction de la référence commune

La classe est apparemment d'accord sur l'écriture qui désigne le nombre 7. Nous poursuivons la construction de la référence commune dans la classe afin de rendre les élèves autonomes dans l'étude et la production d'écriture lors de la phase individuelle. D'autres écritures sont alors proposées et portées à la discussion. Anne écrit alors 5 + 2 + 0. Dans un premier temps, Killian refuse avec le motif qu'il n'y a pas de zéro sur le dé. Cet argument est rejeté dans la discussion puisque nous ne travaillons pas dans le jeu des annonces « dé et doigts ». C'est au tour de André de poursuivre avec l'écriture 3 + 3 + 2.

Le professeur signale alors qu'il ne « prend pas » cette écriture. Certains élèves s'interrogent : le rejet concerne peut-être le nombre de termes. Même André, auteur de l'écriture, s'apprête à modifier celle-ci afin de réduire l'écriture proposée à 2 termes. La consigne ne précise pourtant pas le nombre de termes. Une écriture en trois termes est donc recevable. Il est nécessaire, pour les élèves, de chercher à nouveau le pourquoi du refus. Finalement, la classe se met d'accord sur 3 + 3 + 1. L'écriture 3 + 3 + 2, c'est 8 et ce n'est pas le nombre 7.

Voilà l'écriture maintenant présente sur le tableau, 7 = 4 + 3 = 8 – 1 = 7 = 3 + 3 + 1. Dans cette écriture, un nombre perturbe une élève, Isabelle. André a réécrit 7 avant la décomposition additive 3 + 3 + 1. Isabelle s'interroge sur le pourquoi de ce 7. Nous discutons rapidement puis nous finissons pas l'effacer puisque déjà proposé au début. Nous continuons la recherche des écritures égales au nombre 7. D'autres propositions seront faites comme 1 + 3 + 3 par Adrien. La classe validera avec l'argument qu'il s'agit de la même écriture. Elle est « en miroir ». Nous obtenons avec Killian l'écriture suivante 3 + 3 + 3. Celle-ci est rejetée parce que « cela fait trop ». George, élève *moins avancé*, fait la proposition suivante 1 + 3 + 3. Nous ne la prenons pas puisqu'elle est déjà écrite au tableau. Elle est vraie mais elle est déjà présente. L'écriture « augmente » avec 6 + 2 puis 3 + 4 ….

3.2.4 Une question perdure pour Richard et la prise en charge de l'erreur par la classe

Nous ne pouvons pas écrire cette grande écriture qui fait beaucoup plus que 7. Richard vient lire la grande écriture produite collectivement au tableau. A chaque signe « = », il lit le signe « + ». Il argumente en disant : « je ne suis pas d'accord. 7 + 7 + 7 + 7 + 7, c'est beaucoup plus que 7 ». Cela fait au moins 59. Ce à quoi Christophe répond : « mais tu te trompes Richard, ce n'est pas un signe « + », c'est un signe « = ». Nous lisons donc cette grande écriture. Les élèves, en général, lisent ce qui est écrit 7 = 4 + 3 = 8 – 1 = 3 + 3 + 1 = 6 + 2 …..mais l'élève *avancé* propose de lire autrement. Il annonce 7 est égal à 7 qui est égal à 7 qui est encore égal à 7.... Les uns parlent les décompositions écrites au tableau, les autres le nombre-tout, identique à chaque fois. Pour Richard, il s'agissait d'un nombre très, très grand peut-être en rapport avec la longueur de l'écriture, c'est-à-dire l'espace occupé par l'écriture sur le tableau, la longueur produite par l'écriture. Il proposera 900 000. Christophe, toujours près du tableau, écrit le nombre proposé par Richard pour lui prouver son erreur. Mais Richard invalide cette écriture et demande à la place le nombre 900 000 composé uniquement de chiffres neuf. Il soutient que 900 000 s'écrit 999 999. Christophe barre le nombre écrit avec des neuf. Nous ne tranchons pas cette question pour l'instant. Une élève propose d'appeler ce que nous venons de construire collectivement « le train du sept ».

3.2.5 La phase 2 correspond au travail individuel dans le Journal du Nombre

Les cahiers sont maintenant distribués. Nous avons changé d'outil scripteur. Depuis le début de l'année scolaire, nous travaillons avec le crayon gris. Les élèves effaçaient les erreurs malgré des moyens mis en œuvre explicités comme mettre entre parenthèses ou barrer afin de garder les traces. Le professeur souhaite observer l'évolution des productions. Il a alors interdit la gomme. Cela a un peu amélioré la permanence des traces. Ce n'était pas suffisant. Par la suite, nous avons opté pour le feutre.
Après cette phase collective, nous choisissons un autre nombre pour le travail individuel dans le Journal du Nombre. Un élève propose 8. La classe s'engage à « écrire les écritures » du train du nombre 8. Isabelle formule tout haut : « cela va être dur ». Ensuite, elle dit : « est-ce que l'on peut copier ce qui est sur le tableau ? » La question est soumise à la classe. La réponse arrive très vite. Ce qui est écrit au tableau n'est pas le nombre huit. Christophe donne une information capitale : « il suffit d'ajouter plus un à toutes les écritures additives ».
Les élèves travaillent dans le journal du nombre. A un certain moment, le professeur va appeler les quatre élèves du groupe d'anticipation, avec qui il va travailler pendant que le reste de la classe produit dans le journal du nombre.

3.2.6 La notion d'anticipation

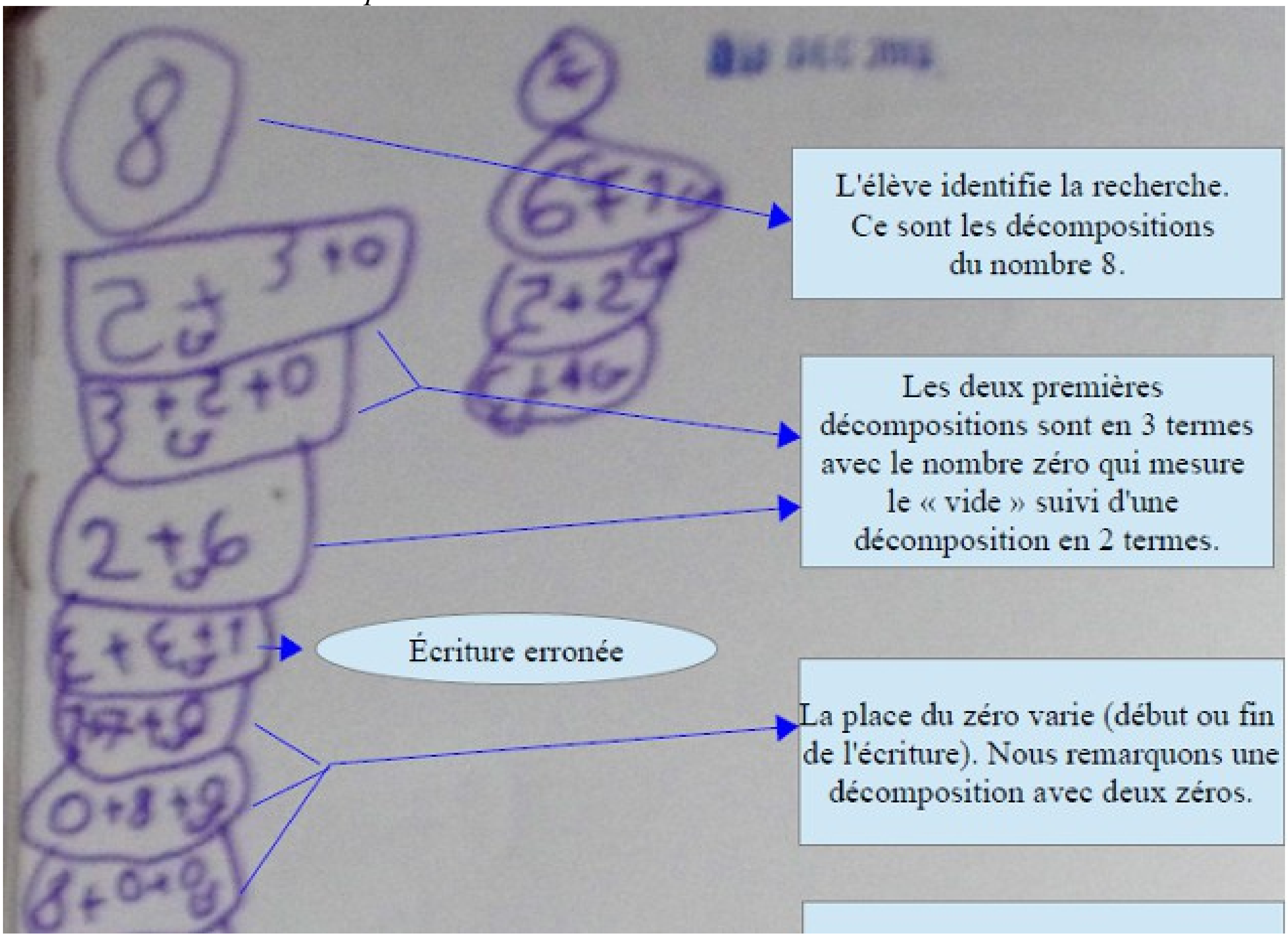
Le travail au sein du groupe d'anticipation est lié au Journal du Nombre Nous définissons rapidement, selon nous, l'enjeu du groupe d'anticipation. Ensuite, nous expliciterons nos hypothèses de travail sur la liaison entre le Journal du Nombre et la modalité du groupe d'anticipation. Comme nous l'avons précisé ci-dessus, nous reprendrons dans une autre partie de la thèse l'étude spécifique du dispositif d'anticipation.
Le choix du professeur, pour cet exemple, est l'étude du module 7 « soustraction/différence » avec les élèves du groupe d'anticipation. Il privilégie des séances régulières mais courtes. Initialement, le travail est prévu pendant une vingtaine de minutes. Le groupe se compose de quatre élèves et du professeur. Le nombre est volontairement restreint pour favoriser l'expression, l'émergence et la prise en charge de l'erreur collectivement mais aussi le ralentissement du temps didactique si nécessaire. L'essence du groupe d'anticipation est l'entrée dans le nouveau savoir qui autorise l'étude d'obstacles récurrents. Il s'agit de favoriser le questionnement et l'étude mathématiques. C'est un groupe « hétérogène », ce n'est donc pas un groupe de niveau. Nous faisons l'hypothèse que ce sont

les échanges entre les membres du groupe qui permettent une avancée du temps didactique. L'élève *plus avancé* est une aide pour le professeur. Le groupe se compose d'une élève *avancée*, deux élèves *moins avancés* et un élève *presque hors jeu*.
Le professeur n'envisage pas l'anticipation comme une reprise ou une répétition du travail à suivre en classe entière. Il s'agit de permettre à l'élève *moins avancé* de reprendre une place parmi les autres élèves. Dans un premier temps, il prendra appui sur les propositions de ses camarades. Pour cela, les activités mises en œuvre doivent lui permettre d'agir sur le temps didactique, d'oser proposer pour ensuite anticiper une réponse afin de posséder une puissance d'action. L'objectif n'est pas de doter l'élève *moins avancé* de « recettes » pour fournir des réponses justes.
Nous reprendrons en détail l'étude du dispositif d'anticipation.

3.2.7 La phase 3, le regard collectif sur les productions

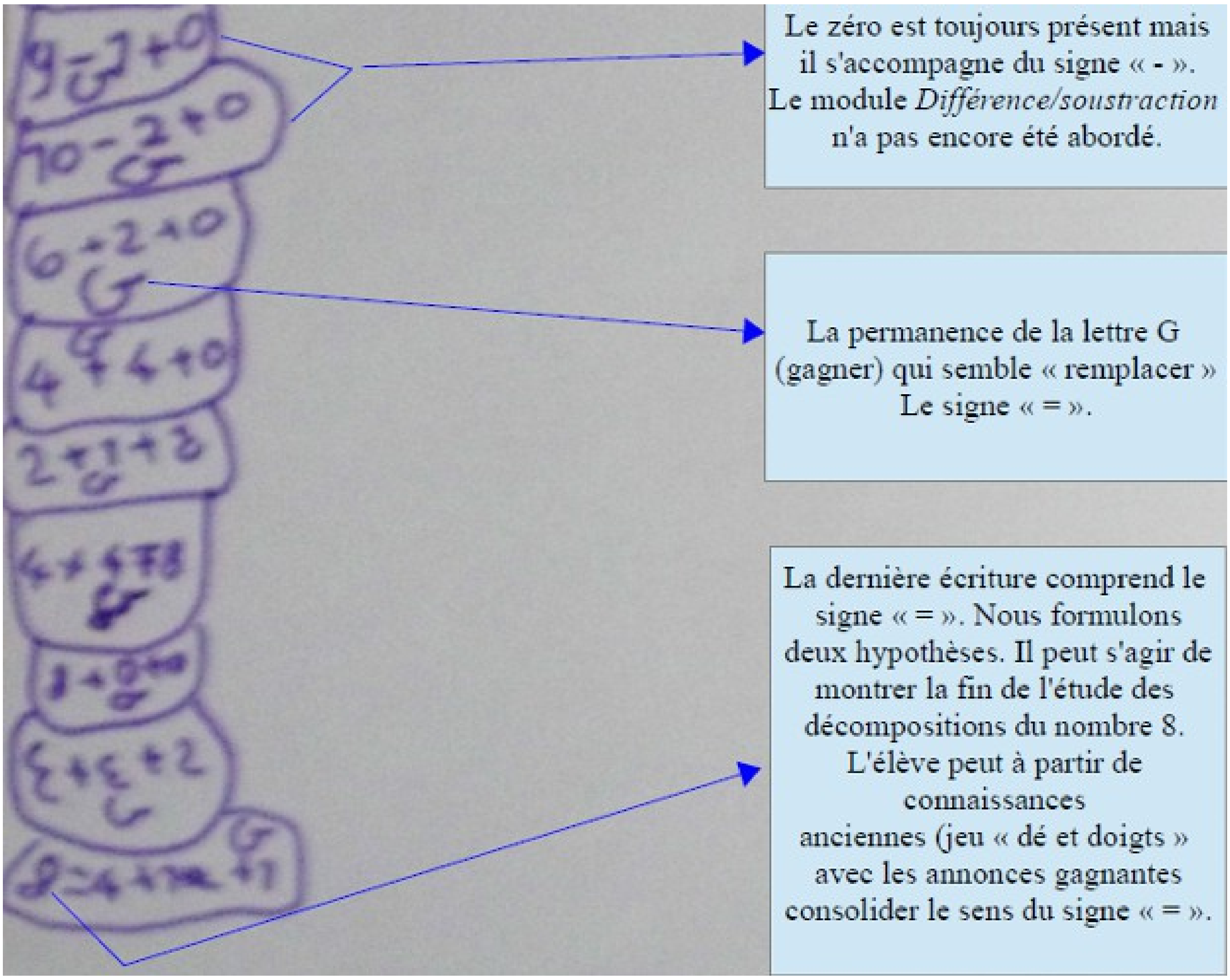
Maintenant, les élèves travaillent activement dans le Journal du Nombre. Le professeur observe silencieusement les écritures des élèves. Il passe dans les rangs. Le groupe d'anticipation n'est pas encore au travail. Pour l'instant, tous les élèves travaillent dans le Journal du Nombre. Le professeur est parfois interpellé par un ou deux élèves sur ce que l'on peut faire ou pas dans le Journal du Nombre. Les élèves disent souvent : « est-ce que l'on a le droit de ... » Le professeur essaie de renvoyer la question et toi « qu'en penses-tu ? » L'élève explique alors ce qu'il pense avoir compris. En fait, l'élève se retrouve dans la position du professeur. Il doit émettre un message oral destiné au professeur pour expliciter l'enjeu du travail d'écritures mathématiques. Cette formulation à voix haute de la tâche peut aider à structurer la pensée puisque généralement l'élève se remet ensuite au travail.
Lorsque le professeur commence à percevoir des signes de ralentissement de l'activité d'écriture, il décide alors d'exploiter certaines productions. Il cherche à la fois à maintenir la recherche et favoriser la contagion. Ce temps pourrait aussi permettre aux élèves « hors jeu » qui sont hors de l'activité d'être à nouveau dans le jeu de la classe. Les nouvelles écritures produites par des pairs sont données à voir et commentées. Les élèves « hors jeu », s'ils ne peuvent produire dans un premier temps des écritures, peuvent prendre appui sur les productions et participer au débat.

La production d'Anne dans le Journal du Nombre



Photographie n°21 : le Journal du Nombre d'Anne (le nombre 8)
Date, le 11 décembre 2013

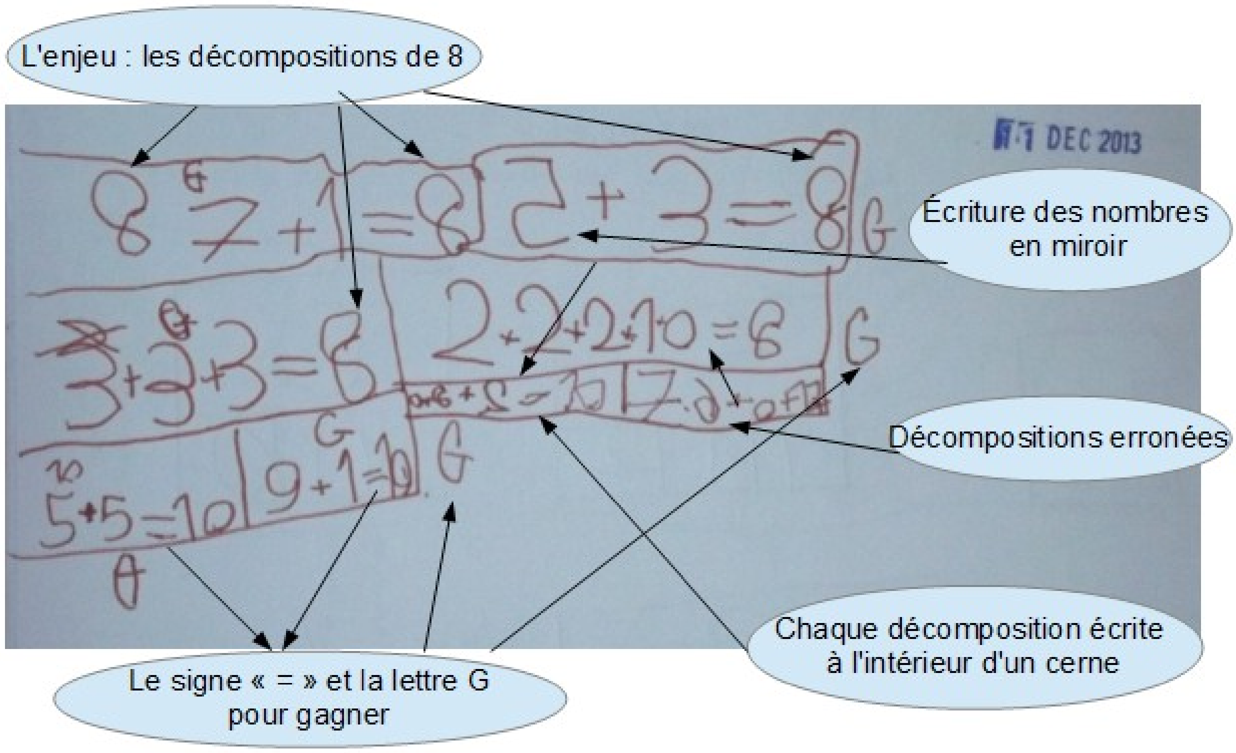
Nous coupons le production verticale d'Anne sur l'écriture du nombre 8. Le nombre est perçu comme comme une écriture additive et il est à noter le nombre importante d'écritures avec trois termes. La première production montrée à l'ensemble de la classe est issue du Journal du Nombre d'Anne. Nous observons les décompositions additives mais également plusieurs écritures du type 10 – 2 = 8. Nous remarquons des décompositions additives de plus de deux termes. En fait, il s'agit d'un train disposé à la verticale composé de nombreuses décompositions du nombre 8, avec les signes « + » et « - ». Nous exposons la suite de la production photographiée.



Photographie n° 21 (suite) : le Journal du Nombre d'Anne (le nombre 8)
Date, le 11 décembre 2013
Il nous semble important de souligner deux éléments, la présence des signes « moins » et « égal » dans les écritures de l'élève. Un autre élève de la classe (Jean-Louis) montre un second travail sur les écritures du nombre 8.

La production d'Jean-Louis dans le Journal du Nombre

Production de première génération, le Journal du Nombre d'Arthur



Photographie n°22 : le Journal du Nombre d'Jean-Louis
Date, le 11 décembre 2013

Jean-Louis a lui aussi tracé des sortes de cernes qui entoure chaque décomposition (des wagons pourrait-on dire). Ces décompositions sont à l'horizontal. Nous remarquons non pas l'absence du signe « = » mais chaque écriture du nombre 8 est refermée sur elle-même.
Le groupe propose alors d'ajouter le signe « = » entre chaque décomposition. Jean-Louis trace au tableau les signes « = ». Ceux-ci se trouvent alors sur les limites qui entourent l'écriture additive. Maintenant, Christophe remarque que le signe « = » est barré par le trait de la cerne. Il ne dit/signifie plus la même chose. Il dit la différence ou encore « pas égal ». Jean-Louis modifie à nouveau la production afin d'écrire le signe « = » à l'intérieur de la cerne.

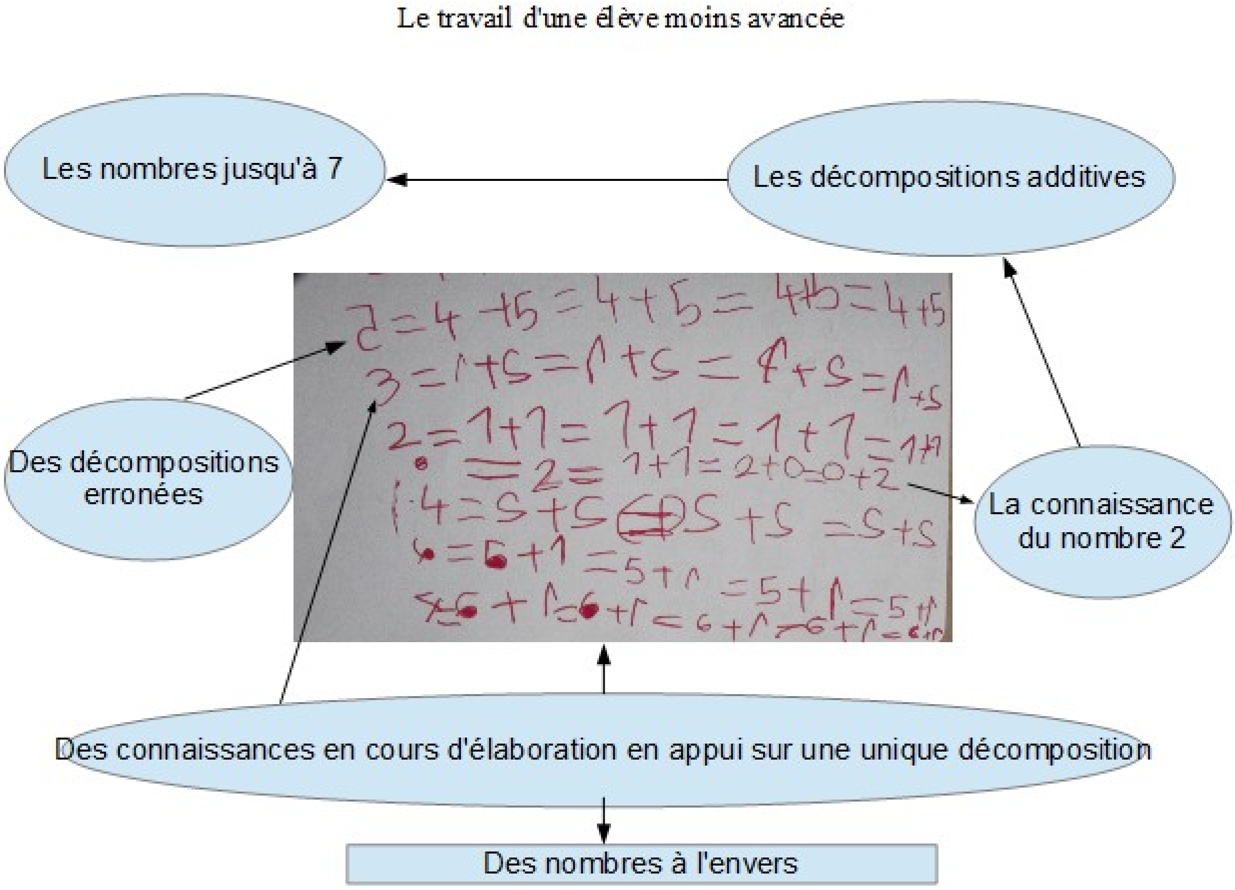
Nous montrons une photographie du TBI. Le Journal du Nombre d'Jean-Louis est placé sous le visualiseur. La production peut ainsi être soumise à la discussion collective. Nous remarquons des désaccords sur certaines décompositions. Par exemple, la classe propose de modifier l'écriture 3 + 3

+ 3. C'est trop. Elle la transforme en 3 + 3 + 2. Ensuite, ce n'est pas un très long train du nombre 8. Les élèves ont donc proposé d'ajouter des signes « = ». Le placement du signe « = » dans des écritures alimente le débat. En bas de la photographie, nous observons le signe « = » barré. Cela a suscité une discussion. Quelques élèves proposaient de le placer devant l'écriture mais cela n'était guère lisible pour certains d'entre eux parce que l'on ne savait pas de quoi on parlait. Ensuite, Jean-Louis a écrit le signe « = » à l'intérieur (comme avec 2 + 2 + 3 + 1 + 0 = 8.)

Ce temps est aussi l'occasion de reparler du zéro. Il y a régulièrement discussion sur ce que code le zéro. Nous débattons autour des écritures additives constituées de mêmes nombres, c'est-à-dire que le professeur attire l'attention des élèves sur une écriture avec le zéro en demandant le nombre de termes par exemple. Il obtient souvent deux réponses. Une partie de la classe a comptabilisé le zéro dans le nombre de termes de l'annonce 2 + 3 + 0. Elle propose bien 3 termes. D'autres élèves ne l'ont pas pris en compte. Ils répondent même parfois : « il ne compte pour rien ». Devant l'étonnement du professeur, ils précisent : « enfin non mais c'est quand tu en as besoin ». Ce type de questionnement permet, pensons-nous, d'approfondir les connaissances sur les nombres. Les nombres ne sont pas à la même place ou dans le même ordre comme par exemple 0 + 3 + 2 et 3 + 2 + 0 mais aussi 0 + 3 + 2 et 3 + 2. Souvent, les élèves disent que « c'est un peu pareil » signifiant ainsi que la somme est bien égale au nombre 5. Les nombres, quant à eux, pourtant les mêmes, sont à des places différentes. Certains regardent l'ordre et disent : « c'est un petit peu pareil mais c'est différent ». Il est important d'apprendre à préciser de quoi nous parlons. Cela amène certains élèves à dire sur le zéro qu'il ne compte pas mais il est parfois nécessaire.

3.3 Les productions de seconde génération

Le professeur en accord avec la classe décide de faire pivoter le cahier pour obtenir une longueur de page plus longue. Nous revenons sur la consigne et la présence du signe « = ». Le professeur sollicite l'avis de la classe sur un autre point. Dans le Journal du Nombre, le professeur a remarqué les productions de quelques élèves. C'est toujours la même écriture additive qui est répétée, par exemple, pour le nombre 7, nous observons un long « train » avec la même décomposition comme 6 + 1 ou encore pour le nombre 3, la même répétition de décomposition 1 + 2. Nous discutons quelques minutes sur ce procédé. Christophe finit que nous faire remarquer que cela ne va pas pour la raison suivante : « le cerveau ne réfléchit qu'une seule fois donc ça va pas ». Il me semble que Christophe, élève *avancé,* fait une différence entre produire de nombreuses écritures qui se ressemblent beaucoup. Cela correspondrait à un coût moins important que la production d'écritures très différentes qui demanderaient de la réflexion, un investissement plus grand dont plus d'effort. Le travail en autonomie dans le Journal du Nombre se poursuit. Le petit groupe de quatre élèves du groupe d'anticipation se reforme pour travailler avec le professeur au fond de la classe. Nous présentons le Journal du Nombre d'Hélène, une élève moins avancé.



Photographie n°23 : les différentes décompositions (longues) de différents nombres (Journal du Nombre d'Hélène)

Date, le 02 décembre 2013

La production nous semble intéressante même si la consigne n'est que partiellement respectée. L'élève possède des connaissances. Une connaissance sans doute plus approfondie du nombre deux puisque cela se traduit par un accès (et donc à une écriture) à différentes décompositions (2 = 1 + 1 = 2 + 0 = 0 + 2. Ensuite, pour les autres petits nombres, elle ne semble disposer que d'une seule décomposition juste (sauf pour le nombre 5 pour lequel la décomposition est erronée). Le nombre 4 est perçu comme 2 + 2. Le nombre 3 est codé avec la décomposition 1 + 2. Le nombre 6 est représenté par 5 + 1. Et le nombre 7 est produit comme la décomposition additive : 6 + 1. Nous notons l'écriture des nombres inversés dans la même production et réalisée par la même élève au cours d'un même travail. Les nombres 5, 1 et 2 sont parfois orientés selon le sens convenu et parfois, ces mêmes nombres sont inversés.

Une élève avancée qui n'est pas prise dans le groupe Anticipation

Hélène est une élève moins avancée qui ne fait pas partie du groupe d'Anticipation. Nous expliquons le pourquoi de sa non participation dans le choix des élèves du groupe d'Anticipation. Le groupe d'Anticipation, rappelons-le, n'a pas pour projet de concerner tous les élèves qui pourraient être identifiés/repérés comme des élèves moins avancés potentiellement. Les élèves moins avancés qui semblent pouvoir tirer parti des échanges/des interactions lors des débats dans la classe ne sont pas tous, prioritairement, intégrés dans le groupe d'Anticipation. Le professeur cherche à caractériser plus précisément le rapport entretenu au savoir par ces élèves potentiellement repérés comme « élève moins avancé », avant la constitution du groupe d'Anticipation.
Si nous cherchons à caractériser le rapport au savoir d'Hélène, nous dirions qu'elle éprouve certaines difficultés à comprendre les enjeux de la situation d'origine. Ensuite, lorsqu'elle a identifié ceux-ci, elle s'efforce de produire des écrits « conformes » au jeu demandé. Plus tard, le changement apporté par la nouvelle contrainte ou l'évolution de cette dernière perturbe à nouveau la compréhension et donc la production des écritures dans le Journal du Nombre.
Par contre, Hélène n'hésite jamais à montrer son travail sous le visualiseur même si celui-ci ne correspond pas exactement au jeu demandé par le professeur. Elle dira qu'elle n'a « pas compris » comme phrase introductive. Puis, elle glissera le Journal du Nombre sous le visualiseur afin de montrer le travail qu'elle a réalisé. Cette élève produit toujours du travail et elle tente de s'approcher des exigences demandées. Généralement, après qu'elle a expliqué le travail qu'elle a effectué, un ou deux élèves de la classe interviennent pour dire qu'ils ne comprennent pas ou bien qu'ils ne sont pas d'accord. Leurs incompréhensions provoquent un « nouveau » regard d'Hélène sur son propre travail (un retour/une relecture). Elle donne l'impression d'avoir su que les écritures produites ne concernent pas l'étude demandée dans savoir expliquer pourquoi. Maintenant, elle explicite et « pense » à nouveau son travail produit en fonction des commentaires des autres élèves (les transactants). Puis, elle semble comprendre le pourquoi des écritures produites qui ne fonctionnent pas dans la situation, par cette phase d'oralisation/échanges. Les écritures sont à côté du jeu demandé par le professeur. Elles ne sont pas très éloignées mais elles sont hors des contraintes mais toutefois, elles sont dans une zone proche. Alors, elle retourne à sa place pour produire d'autres écritures dans le Journal du Nombre. Elle semble pouvoir remettre en question ses propres écritures produites dans le Journal du Nombre sous la « pression » de la classe et après une première production non conforme. A la fin de la séance, elle vient souvent trouver le professeur pour lui dire : « tu sais, j'ai compris ». Les productions effectuées dans le Journal du Nombre sont alors « en conformité » avec la situation. Le temps est nécessaire à son évolution mais elle semble pouvoir parvenir à rester dans le jeu sans une participation au groupe d'Anticipation.

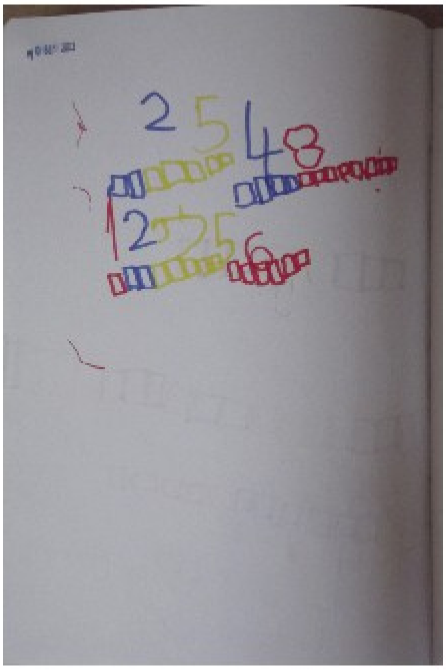
Les élèves moins avancés sont-ils de petits producteurs dans le Journal du Nombre ?

Nous présentons trois photographies de productions d'élèves de début d'année dans le Journal du Nombre. Ces travaux pourraient être l'œuvre d'élèves potentiellement « désignés/repérés » pour constituer le groupe d'Anticipation avec une quantité d'écrits très variable.

Essai 1

La production montre quatre codages de messages réussis. C'est peu mais les messages sont conformes aux trains (les cubes de couleurs) et inversement.

Les productions sont en quantité restreinte mais elles sont conformes aux attentes

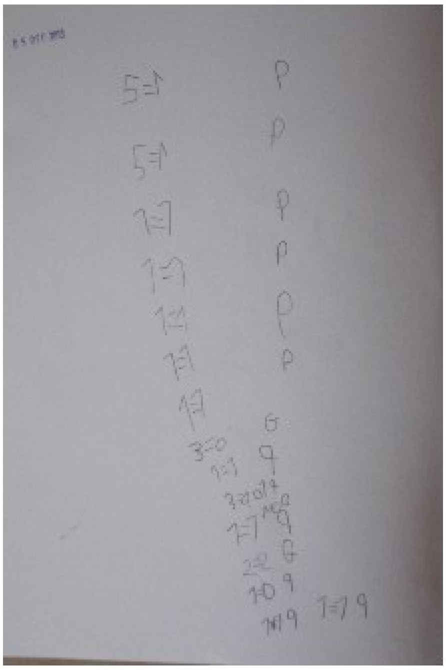


Photographie n°24 : Journal du Nombre de Richard

Date, le 10 septembre 2013

Essai 2

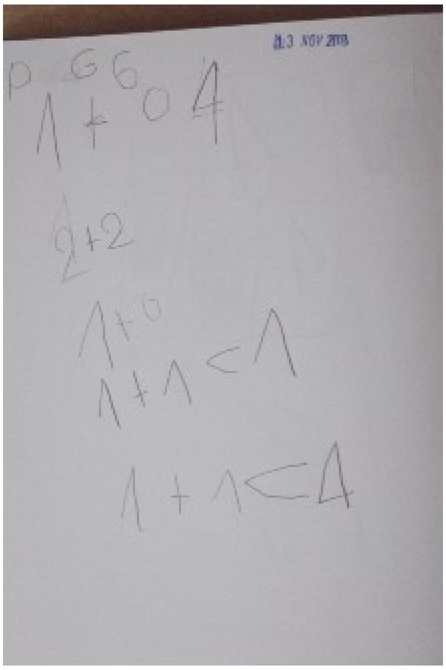
Les productions sont nombreuses mais elles ne sont pas conformes aux attentes



Photographie n°25 : Journal du Nombre de Timéo
Date, le 5 décembre 2013

Essai 3

Peu de productions et elles sont partiellement conformes



Photographie n°26 : Journal du Nombre de Mathieu
Date, le 13 novembre 2013

Nous notons ainsi trois caractéristiques liées aux productions dans le Journal du Nombre parmi les élèves potentiellement moins avancés. Le profil de l'élève moins avancé « petit producteur » avec des écrits qui sont vrais (essai 1). Le profil de l'élève moins avancé « très producteur », la page est remplie de très nombreuses écritures mais les écrits sont erronés (essai 2). Le profil de l'élève moins avancé « producteur petit/moyen » qui produit deux à trois écritures incomplètes. Ensuite, il termine par des écrits vrais (essai 3). Nous pensons que la quantité d'écritures mathématiques produite est à relativiser surtout en début d'année scolaire. Nous souhaiterions cependant relever un point essentiel, tous les élèves produisent. Parfois, la production de l'élève dans le Journal du Nombre comprend peu d'écrit. D'autres fois, les écrits erronés recouvrent entièrement la page du Journal du Nombre. Il existe aussi la situation intermédiaire ou l'élève produit des écrits partiellement vrais mais c'est à partir de toutes ces productions que l'enquête peu commencer.

3.3.1 Schématisation de la structuration 1

Projet du professeur
Étude de l'égalité à partir du nombre 7
Le professeur écrit au tableau 7 =

Incitation à la production collective
L'écriture incomplète appelle à des propositions à partir de connaissances anciennes
Les premières propositions orales fusent

Construction de la référence commune avec l'écriture par une élève d'une décomposition additive comme 7, c'est 4 + 3 parce que 4 + 3 est égale à 7.

Projet de la classe

La classe s'approprie le projet du professeur
(l'adhésion s'entend par les nombreuses propositions formulées à haute voix)

Modification du projet de la classe par l'apport d'un élève *avancé*

Des mains levées.
Choix du professeur d'un élève *avancé* pour proposer une autre écriture additive du nombre 7

L'élève accroche sa proposition à l'écriture précédente et utilise le signe « - ».
(écriture présente sur le tableau 7 = 4 + 3 = 8 - 1)

Nouveau savoir,
le signe « - »,
module *différence* pas réalisé

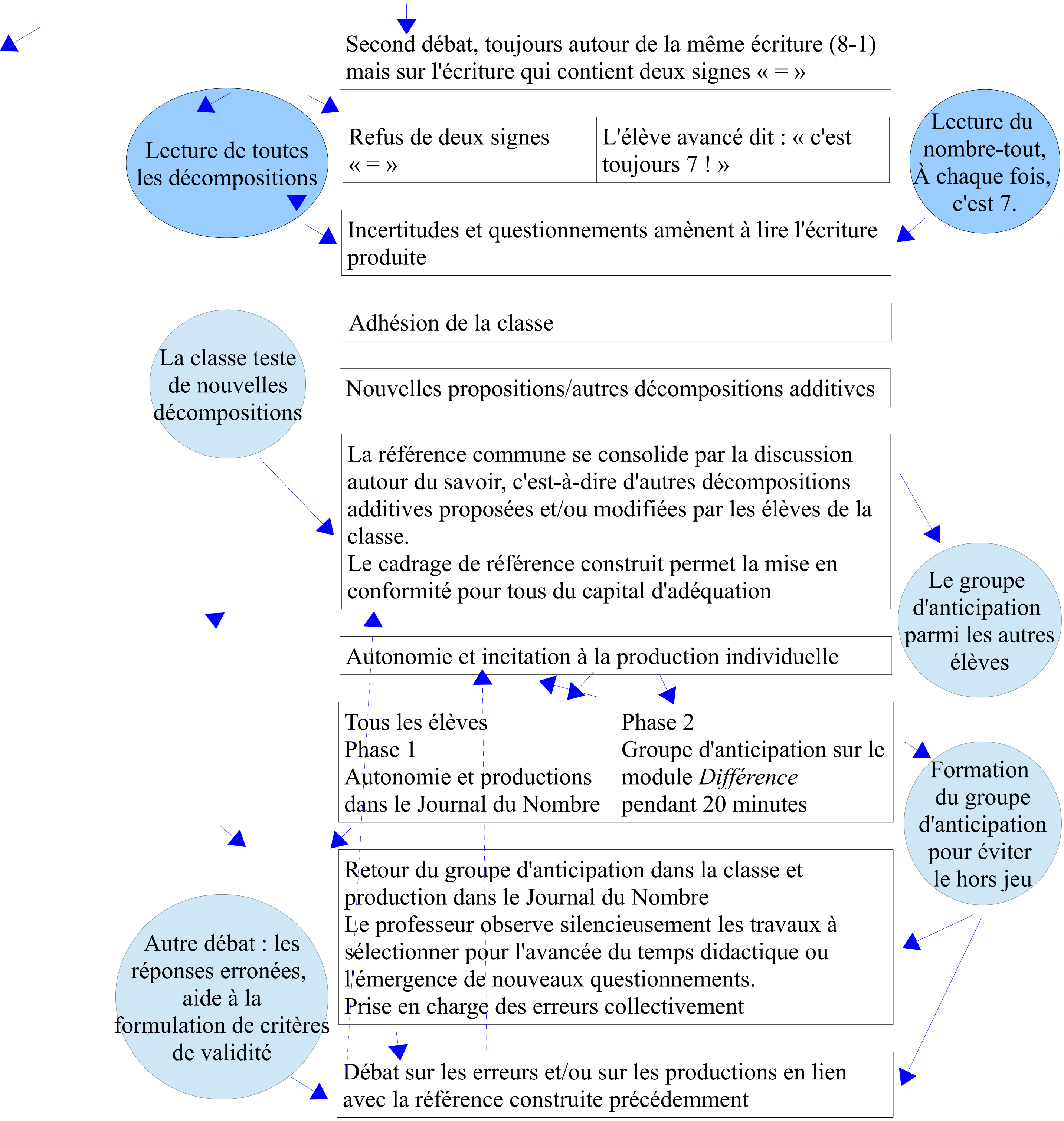
Débat autour de l'écriture avec le signe « - »

Rejet massif de la classe, « c'est trop, cela fait 9. »	Un petit groupe conteste ainsi que l'auteur de la proposition. Il s'agit toujours du nombre 7. Ce n'est pas le même signe mathématique.

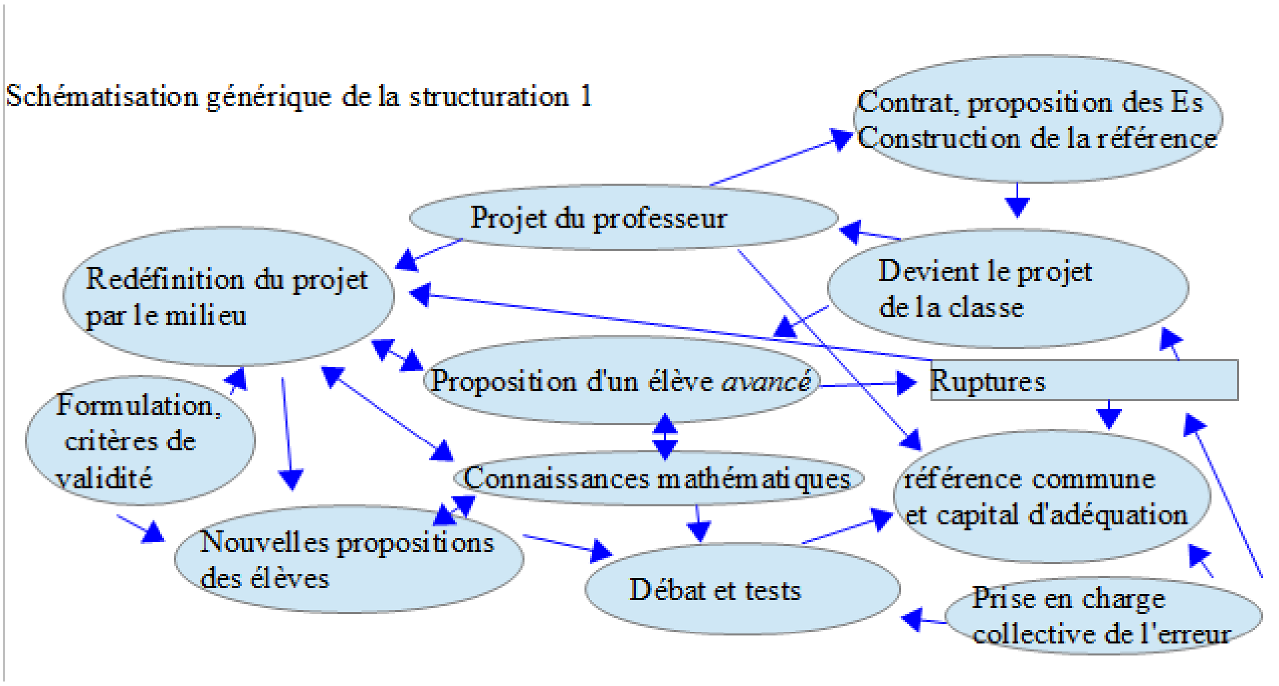
Convocation de l'arrière-plan commun à tous *Le jeu des annonces*

Le doute est important, il subsiste. La classe fait référence au jeu des annonces « dé et doigts » pour *comparer*. La classe observe « ce qui est pareil » puis « ce qui est différent ». La différence entre 8 et 1 est bien de 7.

La mémoire didactique


Second débat, toujours autour de la même écriture (8-1) mais sur l'écriture qui contient deux signes « = »
Lecture de toutes les décompositions
Refus de deux signes « = »
L'élève avancé dit : « c'est toujours 7 ! »
Lecture du nombre-tout, À chaque fois, c'est 7.
Incertitudes et questionnements amènent à lire l'écriture produite
Adhésion de la classe
La classe teste de nouvelles décompositions
Nouvelles propositions/autres décompositions additives
La référence commune se consolide par la discussion autour du savoir, c'est-à-dire d'autres décompositions additives proposées et/ou modifiées par les élèves de la classe.
Le cadrage de référence construit permet la mise en conformité pour tous du capital d'adéquation
Le groupe d'anticipation parmi les autres élèves
Autonomie et incitation à la production individuelle
Tous les élèves
Phase 1
Autonomie et productions dans le Journal du Nombre
Phase 2
Groupe d'anticipation sur le module *Différence* pendant 20 minutes
Formation du groupe d'anticipation pour éviter le hors jeu
Retour du groupe d'anticipation dans la classe et production dans le Journal du Nombre
Le professeur observe silencieusement les travaux à sélectionner pour l'avancée du temps didactique ou l'émergence de nouveaux questionnements.
Prise en charge des erreurs collectivement
Autre débat : les réponses erronées, aide à la formulation de critères de validité
Débat sur les erreurs et/ou sur les productions en lien avec la référence construite précédemment

3.3.2 Généricité de la structuration 1



3.3.3 Structuration 2, autre modalité pour travailler la production de l'incitation collective

La production collective de l'incitation peut être ancrée davantage dans les productions des élèves. Prenons un autre exemple pour avancer dans la description. Comme dans la situation précédente, le Journal du Nombre n'est pas encore distribué. Le professeur présente l'objet de l'étude pour le travail du jour. Il s'agit de produire des « parties fictives ». Nous décidons de produire des annonces gagnantes, toujours gagnantes sans les doigts ni les dés. Nous sommes dans l'écriture symbolique. *L'annonce est gagnante si et seulement si elle est égale au lancer.* Les contraintes sont les suivantes. L'annonce est en trois termes et le lancer en deux termes. Nous précisons alors sous la remarque de Christophe que les trois termes correspondent à trois mains soit l'annonce d'une équipe de 3 élèves. Le lancer en deux termes correspond, quant à lui, à un lancer avec deux dés.

Richard se déplace au tableau pour écrire une annonce en trois termes. Devant son hésitation, le professeur appelle deux autres élèves pour former une équipe de 3 élèves et choisir le nombre-tout de l'annonce. Ils décident de prendre le nombre quatre. Le nombre-tout choisi, l'annonce en trois termes doit être montrée à la classe. Richard affiche 4 doigts ce qui contraint le choix des autres membres de l'équipe. Le professeur arrête Richard. L'équipe doit discuter et s'entendre au préalable sur la manière de faire le nombre 4. Après quelques minutes, trois mains s'affichent. Nous apercevons un doigt et plus loin un autre doigt et encore plus loin deux autres doigts. La classe valide, il s'agit bien du nombre 4. La décomposition est la suivante 1 + 1 + 2 et Richard l'écrit au tableau. Le professeur écrit le signe « = » à la suite de la décomposition. Le débat s'engage. Le professeur précise que la classe va tricher au jeu des annonces puisque les annonces seront toutes gagnantes. Les élèves sont bien sûr partants. Dans notre nouvelle règle du jeu, pour tricher, nous allons déterminer à l'avance le lancer. Il s'agira d'un lancer fictif. Nous sélectionnons les nombres du lancer afin que le lancer en 2 termes soit égal à l'annonce en 3 termes. *Ce sont aux élèves de poursuivre, c'est-à-dire de proposer le lancer en deux termes.*

La première proposition écrite est le nombre 4 puisque les trois termes sont égaux à 4. Nathalie invalide rapidement puisqu'il est nécessaire d'avoir deux dés, deux nombres. Deux termes dans le lancer, ce sont deux dés, il ne faut pas l'oublier. Il est surtout nécessaire de garder en mémoire que le nombre-tout, la somme de l'écriture additive est égale au nombre 4 mais sous une forme additive et réduite puisqu'en deux termes. Anne précise qu'il est facile de transformer le lancer avec l'ajout du zéro. Sa proposition respecte donc bien la contrainte des deux termes. Elle note au tableau 1 + 1 + 2 = 4 + 0 mais Killian intervient. Aujourd'hui, nous sommes dans le jeu des annonces et ses contraintes. Il se déplace près du tableau. On ne peut pas prendre ce lancer puisqu'il n'y a pas de zéro sur un dé. Finalement, nous modifions le lancer avec l'écriture 2 + 2 c'est 4. 2 + 2 est égal à 4 et nous avons deux termes. Le professeur s'assure de la compréhension du travail à réaliser avant d'entériner l'étude/enquête dans le Journal du Nombre avec une seconde proposition suivie d'une troisième. Un élève propose l'écriture suivante : toujours la même annonce, mais le lancer se code 3 + 1. Nous validons rapidement. Adrien propose alors 0 + 4 que la classe rejette massivement avec le motif du 0 absent sur le dé. Il transforme sa proposition en 1 + 3. Un élève remarque alors que l'on ne peut pas faire 1 avec deux dés. Il explique que le plus petit lancer c'est 1 et encore 1, c'est-à-dire 2 puisqu'il n'y a pas de zéro. Ce sera l'objet du travail du lendemain avec l'étude du plus petit lancer réalisé avec deux dés. Il est nécessaire de laisser un peu de temps et de revenir sur cette connaissance mise en avant par un élève. Cela constitue en quelque sorte les « parties fictives » de la classe ancrées dans les découvertes issues du Journal du Nombre. Nous allons nous intéresser ultérieurement au plus petit lancer avec deux dés égal à une annonce en 3 termes. Nous retravaillons l'égalité et les annonces à 3 mains mais sous la forme symbolique.

3.3.4 Le temps de l'autonomie dans le Journal du Nombre

Le Journal du Nombre est distribué à chaque élève. C'est le temps du travail individuel. Le professeur passe dans les rangs. Il observe les productions. Il laisse du temps aux élèves pour produire quelques écritures (les productions de génération 1). Une écriture attire son attention dans le Journal du Nombre d'un élève. Le professeur demande à l'élève de montrer sa production à la classe. La règle, si l'on n'est pas d'accord, est de laisser d'abord l'auteur de la production s'exprimer avant de dire que l'on n'est pas d'accord. Ensuite, il est nécessaire d'expliciter et d'en donner les raisons.
Il s'agit de la décomposition suivante 2 + 3 + 0 = 3 + 2. En fait, ce qui retient l'attention du professeur est l'apparition du zéro. Cette fois-ci, l'élève a placé le zéro systématiquement dans l'annonce. La question mérite d'être posée au groupe et étudiée afin de verbaliser la légitimité et le pourquoi de sa présence. Dés le début, un certain nombre d'élèves semblent rejeter cette possibilité. C'est l'argument qu'il n'y a pas de dé avec zéro qui prime. Les élèves les plus avancés rejettent ce motif et montrent le nombre 4 avec les deux mains. Nous observons quatre doigts sur une main et l'autre main refermée pour signifier le zéro. Faire zéro, montrer zéro dans l'annonce est donc possible.
Nous discutons. Les contraintes sont-elles respectées (l'annonce en 3 termes et le lancer en 2 termes) ? Ensuite, cette annonce-là est-elle gagnante et si oui pourquoi ? Nous débattons. L'annonce est validée gagnante. Cela amène un changement de contraintes, la nécessité d'écrire des annonces en 3 termes avec le zéro (les productions de génération 2).
L'observation collective de certains cahiers va provoquer des productions de génération 3. Nous sommes en train de discuter autour des annonces en 3 termes qui contiennent un zéro. Celles-ci sont gagnantes si elles sont égales au lancer en 2 termes. Ce temps est favorable à l'observation des annonces presque pareilles. Elles sont composées des mêmes nombres mais elles ne sont pas dans le même ordre. Puis un élève souhaite nous montrer son Journal du Nombre avec l'écriture 2 + 1 + 2 = 2 + 3. Les élèves semblent ne pas vouloir prendre cette écriture. Aux questions du professeur, ils répondent qu'elle est différente parce qu'il n'y a pas les mêmes nombres. Elle n'est donc « pas pareille. » L'auteur de cette écriture n'est pas d'accord. Il s'empare du feutre et entoure le nombre 2 de l'annonce et le nombre 2 du lancer. Il donne à voir 1 + 2 dans l'annonce et le nombre 3 du lancer. Pour parfaire son explication, il formule les choses ainsi : « c'est parce que le 3, il s'occupe de deux nombres ». Il réalise une flèche qui part du 1. Il accroche le 2 pour se diriger vers le nombre 3. 1 et

2 c'est 3 donc il répète que le 3 s'occupe de deux nombres. Nous décidons d'appeler ce jeu « le jeu du nombre qui s'occupe de deux nombres ». Nous effaçons les différentes flèches parce qu'une élève disait ne pas comprendre. Le professeur met ensemble les nombres du 3 (2 + 1) de l'annonce et entoure le 3 du lancer en reprenant les propos de l'élève. Les élèves proposent des écritures additives qui respectent cette contrainte. Nous étudions collectivement quelques écritures. Puis chaque élève repart étudier dans son Journal du Nombre. Ils jouent au jeu du nombre qui s'occupe de deux nombres dans le Journal du Nombre.

3.3.5 Schématisation de la structuration 2

Projet du Professeur : faire écrire par les élèves des annonces en 3 termes égales au lancer en 2 termes
(projet ancré dans des connaissances anciennes)

Autre nouveau projet possible dans le Journal du Nombre

La discussion alimente de nouveaux Projets

L'*incitation à la production collective*
1-Choix de l'annonce en 3 termes par une équipe de 3 joueurs (3 élèves) : montrer, dire et écrire la décomposition additive en 3 termes au tableau
2-Écriture du signe « = » à la suite des 3 termes
3-Reste à émettre des propositions pour l'écriture du lancer par les élèves de la classe en respectant la *contrainte de l'égalité et de 2 termes*

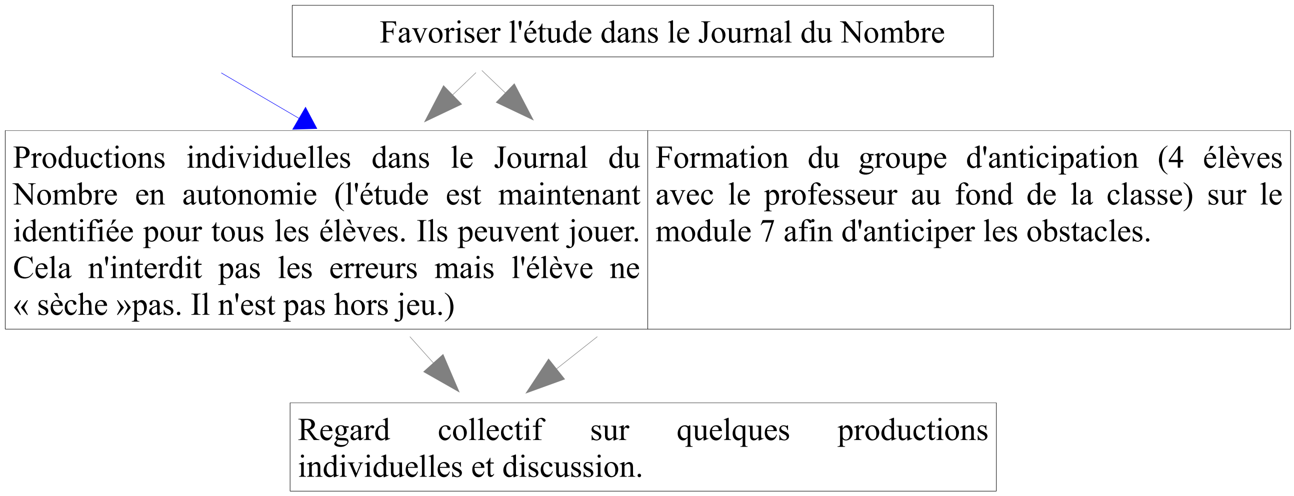
Débat autour des propositions émises par les élèves, par exemple :
1-le nombre 4 est proposé comme lancer. Il est rejeté puisqu'il est nécessaire d'avoir 2 nombres.
2-la proposition est modifiée par une élève avec 4 + 0. Elle est encore rejetée puisqu'il n'y a pas de 0 sur le dé.
3-une autre proposition par un autre élève de la classe, avec 2 + 2. Accord de tous les élèves puisque c'est le nombre 4 sous la forme d'une décomposition en 2 termes.

Construction de la référence commune ce qui correspond à :
1-comment jouer avec la contrainte de l'annonce en 3 termes = au lancer en 2 termes ?
2-le pourquoi jouer avec 2 termes ? Puisqu'il y a 2 dés.
3-la recherche collective de l'écriture en 2 termes du lancer et l'exclusion du lancer hors jeu avec la présence du zéro.
La référence commune sert de cadrage aux recherches mathématiques dans le Journal du Nombre.

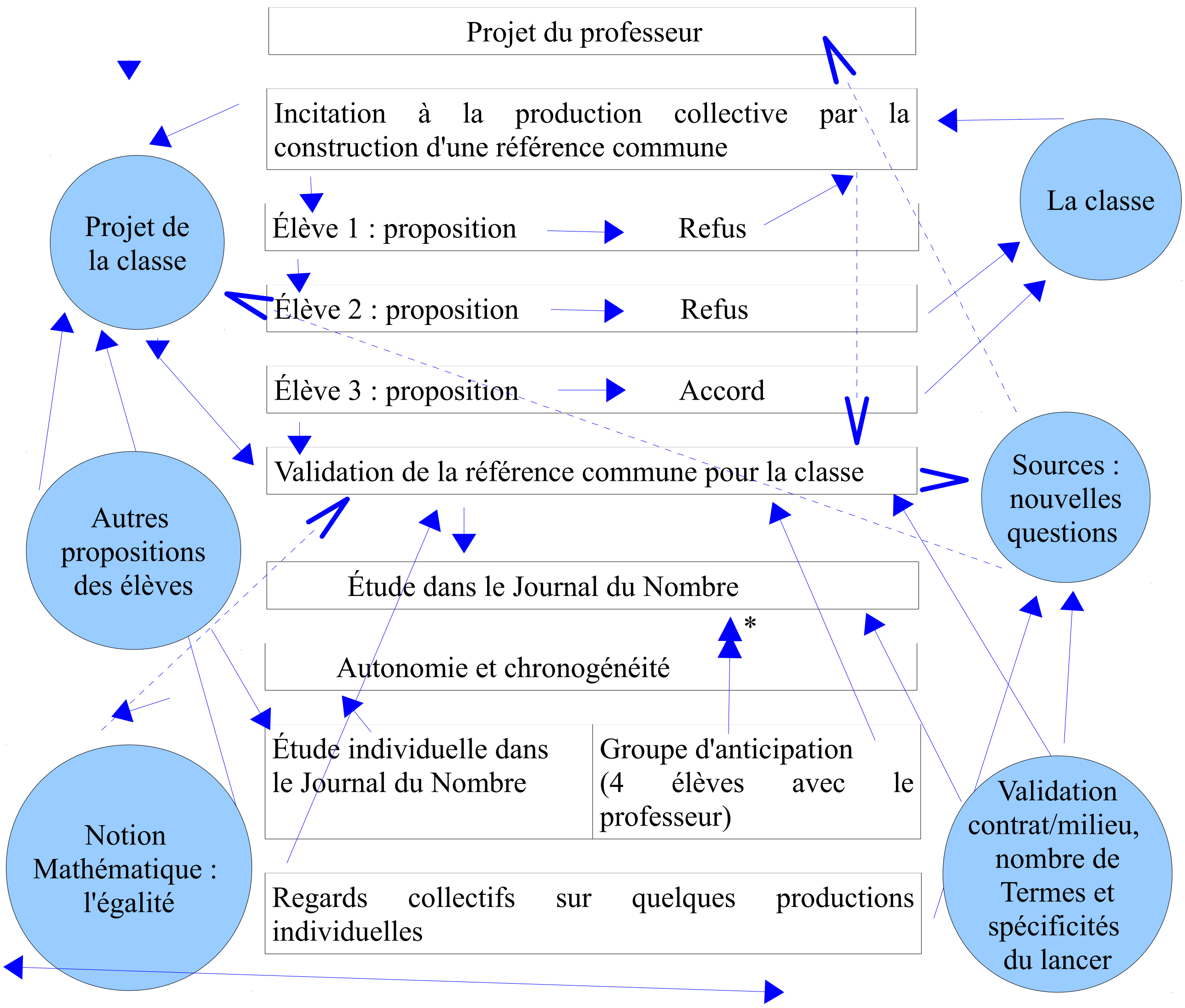
Autres propositions comme 3 + 1 ou 1 + 3.
Consolidation de la référence Commune.
Favoriser le capital d'adéquation.

Étape précédente, la production de l'incitation collective avec la construction de la référence collective pour l'émergence de la construction de l'autonomie

Questionnement d'un élève :
« Peut-on faire 1 avec 2 dés ? »
« Quel est le plus petit lancer avec 2 dés ? »



3.3.6 Schématisation générique de la structuration 2



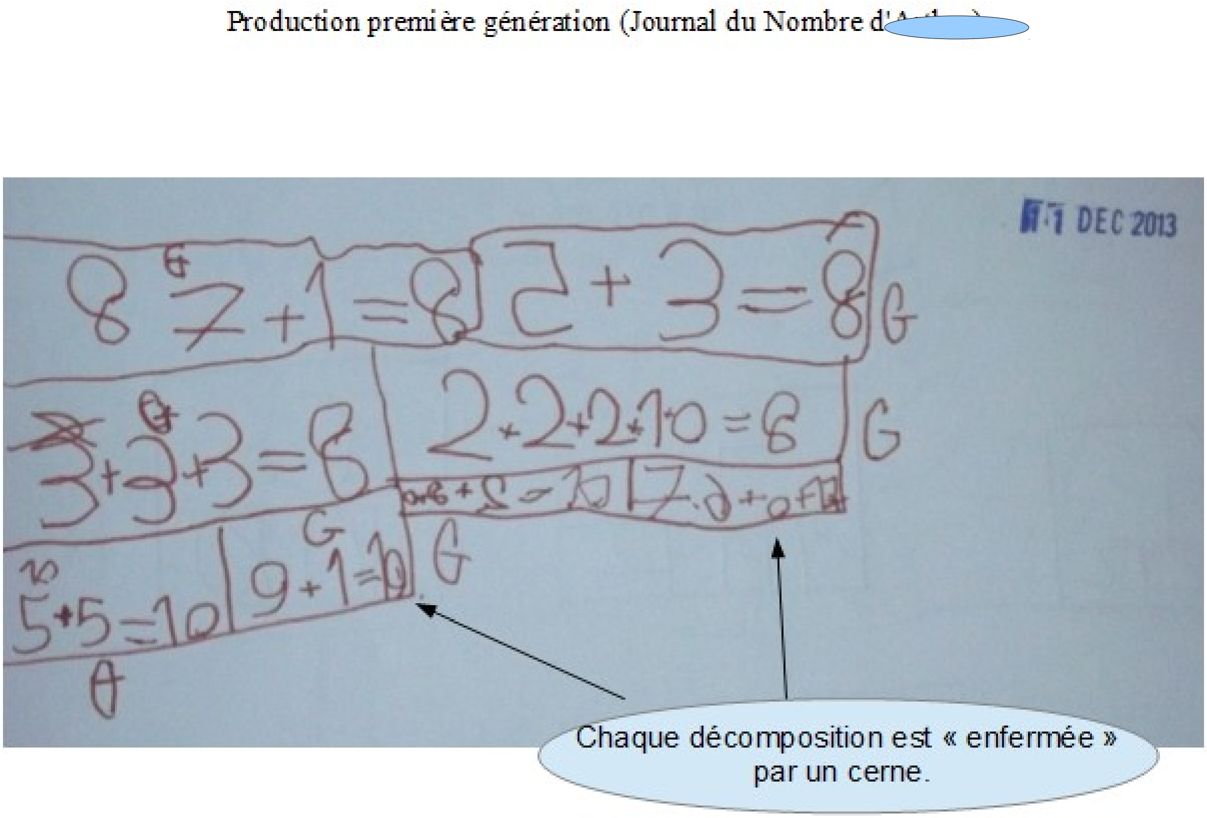
Les élèves *moins avancés* produiront dans le Journal du Nombre sur des temps décrochés mais également sur de très courts temps inclus dans la séance. Par exemple, ils écriront avant la constitution du groupe d'anticipation puis, lors du retour dans le grand groupe, c'est-à-dire avant le regard collectif de la classe reformée sur les productions individuelles (pour la structuration 2).

3.4 Les productions de générations 1, 2 et 3 (un exemple)

Nous centrons notre sélection sur trois productions successives d'un même élève réalisées en début *d'année*, les 11, 12 et 13 décembre 2013. La production de première génération permet de montrer les connaissances anciennes dont dispose l'élève pour traiter le milieu-problème. Ensuite, les échanges lors du débat sur la production de génération 1 créent des évolutions perceptibles dans la production de seconde génération. Pour terminer, la production de troisième génération tentent de dire les connaissances en cours de construction, toujours avec la même situation. Nous rappelons que ce travail est effectué dans le Journal du Nombre. Nous précisons que le temps d'apprentissage n'est pas un temps d'pprentissage classique.

3.4.1 Production de première génération

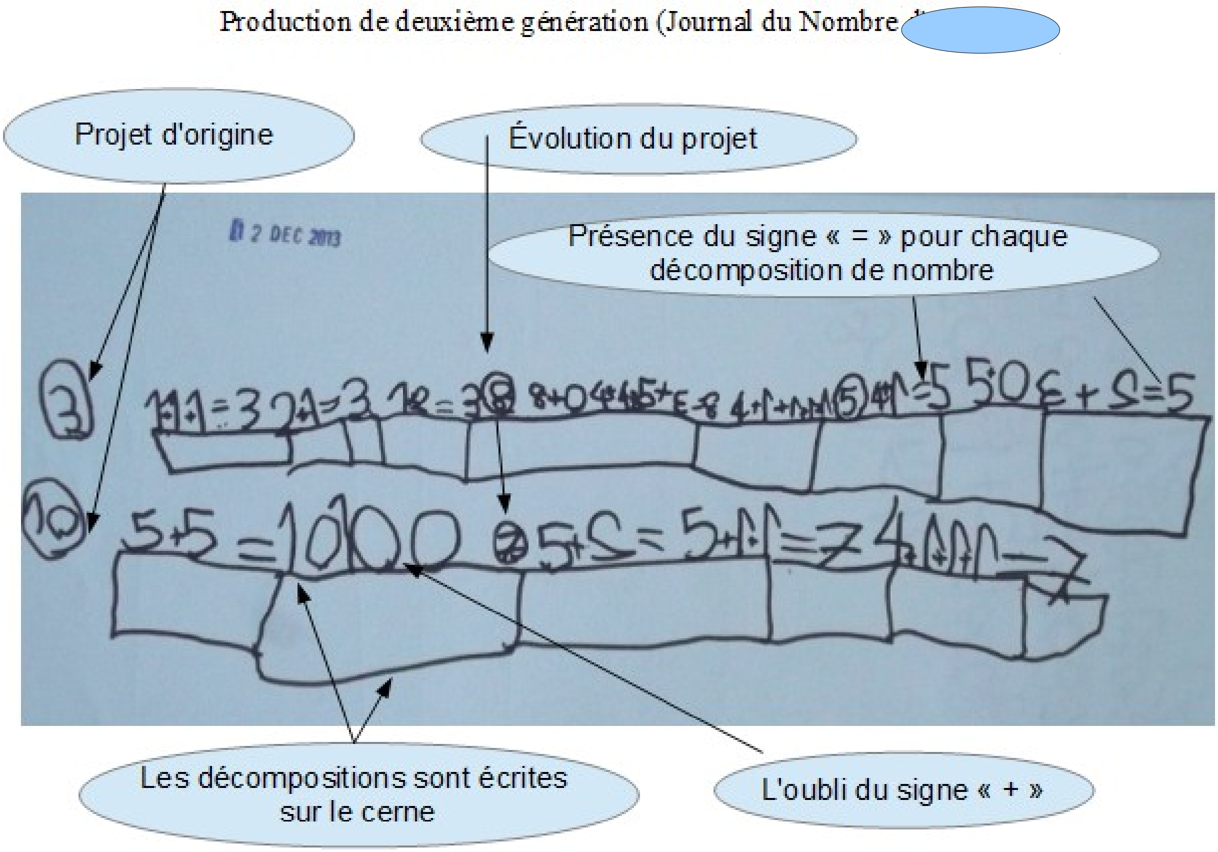
La première production a été montrée par l'auteur à l'ensemble du groupe (travail exposé et commenté sous le visualiseur). La classe est intervenue sur la question des cernes qui « enfermaient » chaque décomposition bien que l'enjeu ait été l'écriture d'une très longue décomposition mathématique (« écrire le plus long train du nombre 8 »). L'élève a cherché à modifier immédiatement la production par l'ajout de signes « = » mais ceux-ci se trouvaient alors sur le « trait » du cerne. Le signe « = » devenait (avec le cerne) un signe « ≠ ». L'élève a apporté aussi des modifications aux décompositions lorsque celles-ci étaient erronées comme avec l'écriture 3 + 3 + 3 = 8 puisque la classe ne « prenait » pas l'écriture parce qu'elle n'était pas vraie.



Photographie n°22 : production de première génération (Jean-Louis)
Date, le 11 décembre 2013

Ci-dessus, on perçoit que l'élève a écrit huit décompositions pour trois nombres différents. Sur les huit décompositions, six décompositions sont des décompositions en deux termes. Les décompositions supérieures à deux termes (3 + 3 + 3 = 8 et 2 + 2 + 2 + 1 + 0 = 8) sont erronées. Pour *chaque* écriture (sauf la dernière pour le nombre 7), l'élève produit le signe « = » qu'il double de la lettre G qui signifie « gagné » dans la référence du jeu des annonces « Dé et doigts ».
Nous reproduisons les différentes décompositions pour les différents nombres :
-le nombre 8 avec quatre décompositions (7 + 1 = 8, 5 + 3 = 8, 3 + 3 + 3 = 8, 2 + 2 + 2 + 1 + 0 = 8) ;
-le nombre 10 avec trois décompositions (5 + 5 = 10, 9 + 1 = 10, 8 + 2 = 10) ;
-le nombre 7 avec une seule décomposition (6 + 0, il semble ne pas y avoir de signe « = », de plus, la décomposition n'est pas compréhensible). Nous observons, maintenant, la seconde production réalisée le lendemain dans le Journal du Nombre.

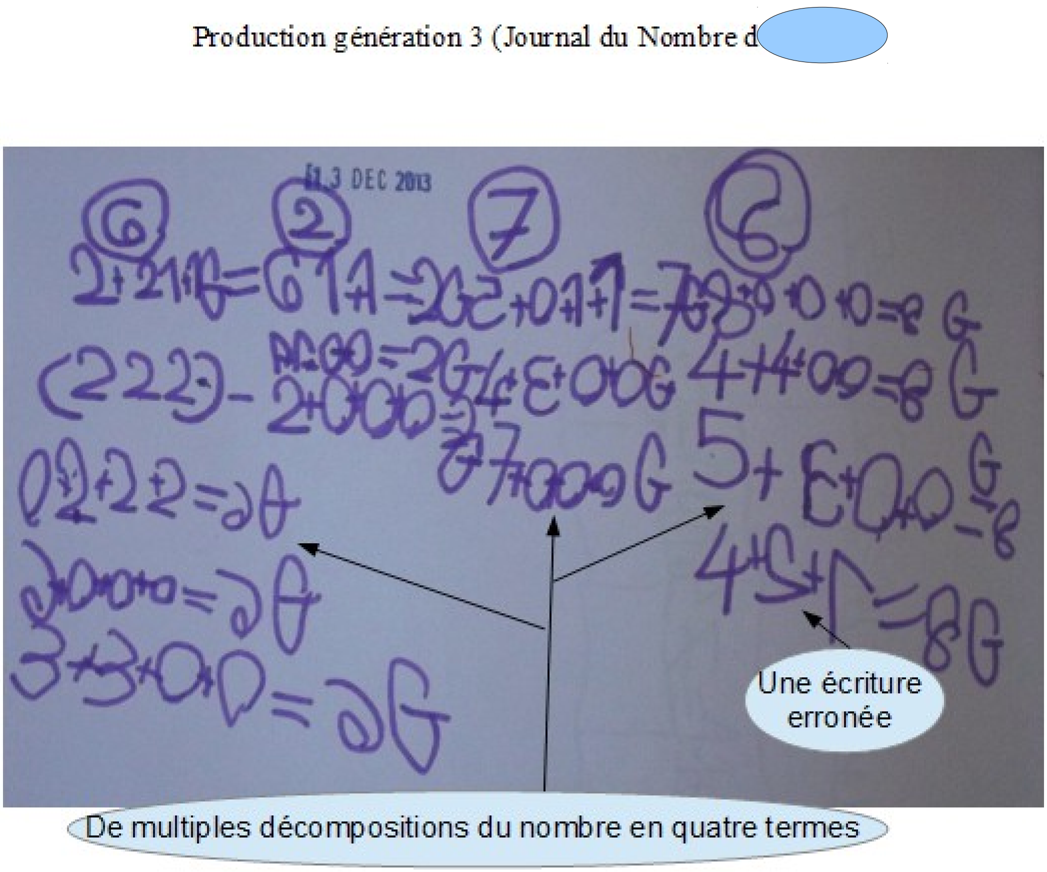
3.4.2 Production de deuxième génération



Photographie n°27 : production de deuxième génération (Jean-Louis)
Date, le 12 décembre 2013

Le lendemain, donc, l'élève construit (trace) un train sur lequel des différentes décompositions se trouvent posées. Les écritures sortent effectivement du « cerne » par rapport au travail réalisé lors de la production de première génération. Nous pouvons formuler l'hypothèse que ce sont, sans doute, les échanges avec le groupe-classe à partir de la production de première génération qui ont fait évoluer la représentation de l'élève (ce que peut représenter/désigner une longue écriture mathématique), du « cerne », au « train » en particulier.
Le nombre de décomposition a augmenté (il y a quatorze écritures contre huit précédemment). Le choix des nombres est également supérieur dans la production de deuxième génération (cinq contre trois). Le nombre de décomposition en deux termes est toujours important mais, ici, nous notons que les décompositions en quatre termes sont vraies. Nous reproduisons les différentes décompositions pour les différents nombres :
-le nombre 3 avec trois décompositions (1 + 1 + 1 = 3, 2 + 1 = 3, 1 + 2 = 3) ;
-le nombre 8 avec quatre décompositions (8 + 0, 4 + 4 = 8, 5 + 3 = 8, 4 + 1 + 1 + 1 + 1) ;
-le nombre 5 avec trois décompositions (4 + 1 = 5, 5 + 0 = 5, 2 + 3 = 5) ;
-le nombre 10 avec deux décompositions (5 + 5 = 10, 10 + 0) ;
-le nombre 7 avec trois décompositions (5 + 2 = 7, 5 + 1 + 1 = 7, 4 + 1 + 1 + 1 = 7).
Nous observons, maintenant, la troisième production réalisée le lendemain dans le Journal du Nombre

3.4.3 Production de troisième génération



Photographie n°28 : production de troisième génération (Jean-Louis)
Date, le 13 décembre 2013

La production de troisième génération, le lendemain, montre une nouvelle évolution. L'élève ne représente plus une décomposition comme une « écriture close/limitée » sur elle-même par le cerne qui l'entoure. Il ne pose pas non plus la décomposition sur le cerne/train. En fait, ce dernier a complètement disparu de la production de troisième génération, alors qu'il était encore présent dans la production de deuxième génération. L'élève semble s'être détaché de cette représentation pour laisser la décomposition notée (écrite) entrer en relation avec une autre décomposition. Nous notons les écritures qui semblent se « mélanger » dans l'espace de la feuille, par exemple, une écriture additive « entre en collision » avec une autre écriture additive (cf. les différentes décompositions produites sur la première ligne horizontale par exemple).
La production montre quatorze décompositions, presque toutes en quatre termes pour quatre choix de nombre (le choix des nombres est moindre que dans la production de deuxième génération). Nous reproduisons les différentes décompositions :
-le nombre 6 avec quatre décompositions (3 + 3 + 0 + 0 = 6, 6 + 0 + 0 + 0 = 6, 0 + 2 + 2 + 2 = 6, 2 + 2 + 1 + 1 = 6, l'élève a oublié d'inscrire le second signe « + ») ;

-le nombre 2 avec trois décompositions (1 + 1 = 2, 1 + 1 + 0 + 0 = 2, 2 + 0 + 0 + 0 = 2) ;
-le nombre 7 avec trois décompositions (5 + 0 + 1 + 1 = 7, 4 + 3 + 0 + 0 = 7, 7 + 0 + 0 + 0 = 7) ;
-le nombre 8 avec quatre décompositions (8 + 0 + 0 + 0 = 8, 4 + 4 + 0 + 0 = 8, 5 + 3 + 0 + 0 = 8, 4 + 2 + 1 = 8 (écriture erronée)).

3.4.4 Analyses

Pourquoi regroupons-nous ces trois productions de génération 1, 2 et 3 ? Que peuvent-elles nous apprendre sur les connaissances en jeu ? Enfin que révèlent-elles sur la pratique de l'usage du Journal du Nombre.
Nous choisissons d'exposer trois productions réalisées par un même élève à trois temps différents t1 (11 décembre 2013), t2 (12 décembre 2013) et t3 (13 décembre 2013). Elles permettent, selon nous, de suivre l'évolution d'un élève sur la construction d'un objet de savoir (la construction d'une longue écriture mathématique avec l'emploi des signes « + » et « = ») ou encore l'appréhension de la question par un élève (produire différentes décompositions d'un même nombre). Nous pourrions dire que la production de première génération montre un élève avec des connaissances. L'élève va donc gérer la situation-problème avec les connaissances dont il dispose au temps 1. Elles concernent essentiellement les décompositions en deux termes. Il semble que l'entourage (le « cerne ») de chaque décomposition laisse penser que l'élève relie le nombre à une décomposition (une sorte de correspondance terme à terme). Ainsi une décomposition est égale à un nombre-tout et à chaque fois, l'élève procède de la même manière (une décomposition est reliée à un nombre-tout). Ces connaissances se modifient dans la production de deuxième génération puisque les décompositions sont essentiellement des décompositions à quatre termes et elles sont vraies. Elles semblent prendre appui sur l'ancienne structure, les anciennes connaissances (les traces des wagons/cases du train). L'élève part des connaissances disponibles en t1 pour élaborer de nouvelles connaissances en t2. Elles sont non stabilisées, comme peut le montrer, selon nous, la présence des cernes. Les écritures montrent en effet un élève qui commence à construire des relations entre les nombres (les décompositions). Ainsi la décomposition du nombre 3 (*1* + *1* + *1* = 3) est utilisée pour écrire la décomposition du nombre 7 avec 4 + *1* + *1* + *1* = 7 au sein de la production de deuxième génération. La quantité d'écrit augmente. Elle est plus importante dans les productions de génération 2 et 3 (la quantité d'écrit est stable pour la production de génération 3). Les décompositions additives passent de deux termes à quatre termes et elles sont maitrisées dans la production de génération 3.

3.4.5 Les hypothèses sur l'évolution des connaissances

L'évolution est importante entre la production de génération 1 et la production de la génération 2. De plus, l'évolution continue dans la production de génération 3. Par exemple, pour le « train » du nombre sept, on observe deux décompositions reliées par le signe « = » dans la production de génération 2 dont nous reproduisons les écritures (5 + 2 = 5 + 1 + 1= 7). La production de génération 3 se rapproche à la production réalisée par Anne (production de génération 1 avec chaque décomposition dans un cerne : 8 c'est 5 + 3 + 0, 2 + 6, 3 + 3 + 1, 1 + 7 + 0, 0 + 8 + 0, 8 + 0 + 0, 9 – 3 + 0, 10 – 2 + 0, 6 + 2 + 0, 4 + 4 + 0, 2 + 1 + 5, 4 + 4 + 0, 8 + 0 + 0, 3 + 3 + 2, 8 = 4 + 2 + 1 + 2) mais sans la présence du signe « - ». Ce dernier travail (la production de génération 3 d'Jean-Louis) n'est donc pas une copie de la production d'Anne. L'évolution a commencé en t1 par le débat/dialogue de l'auteur de la production avec le reste des élèves de la classe sur la production de génération 1. Puis, d'autres élèves ont montré leurs travaux et la classe a discuté sur les nouvelles productions. L'évolution produite n'est plus ainsi le résultat d'« effets directs » mais nous pourrions dire qu'il s'agit d'« effets indirects » en t2, pour arriver à des connaissances stabilisées en t3. Le Journal du Nombre se distingue d'un cahier de recherche qui serait utilisé uniquement de manière

individuelle puisqu'il permet le partage et le dialogue sur les écritures mathématiques qui y sont produites. Elles font avancer l'élève comme toute la classe. Le Journal du Nombre peut/doit être montré et du temps doit être consacré à la discussion sur les productions.
Le temps, c'est-à-dire l'inscription du travail de l'élève dans sa durée propre, nous semble, une nouvelle fois important. Le professeur n'a pas cherché à obtenir des productions de génération 1 « conformes » au jeu demandé. Dans le temps 1 de l'incitation productive collective, le professeur vise essentiellement que l'élève puisse jouer au jeu demandé mais l'élève ne peut jouer au jeu demandé qu'avec les connaissances dont il dispose. Il est donc important de laisser du temps au temps afin de permettre une construction possible des savoirs étudiés.

4. BREFS ÉLÉMENTS DE DISCUSSION
Le temps de l'incitation productive collective est un temps essentiel qui conditionne la qualité des productions réalisées par les élèves dans le Journal du Nombre. Sans ce temps spécifique, seuls les élèves avancés décodent les signes de l'action du professeur. Nous ne disons pas que tous les élèves sont en capacité de réussite immédiate mais tous sont en capacité de le devenir. Et pour le devenir, ils ont le temps de pratiquer et de jouer au jeu demandé par le professeur puisqu'ils ont la compréhension de l'enjeu du travail demandé (même imparfaite) dans un milieu-problème complexe et riche, source d'enseignement/apprentissage.

CHAPITRE 3 : **LE JOURNAL DU NOMBRE, UNE ÉTUDE EMPIRIQUE**

1. INTRODUCTION GÉNÉRALE SUR LA NOTION DE L'INCITATION PRODUCTIVE COLLECTIVE

Le chapitre 3 est consacré à « l'incitation productive collective » dans le *Journal du Nombre.* Il se commence par donner à voir au lecteur une vision générale du travail de l'incitation productive collective. Ensuite, il montre les premières productions individuelles des élèves dans le Journal du Nombre à partir de l'incitation, avant d'en venir à l'analyse spécifique de l'incitation productive collective à partir de transcriptions. Le chapitre 3 se compose donc de trois parties dont nous précisons le contenu. Une séance du domaine *Situations* (la situation précédente) permet de poser les bases de la construction des hypothèses de l'incitation productive collective. Ensuite, l'intrigue nous permet d'identifier les différentes phases liées à cette forme de travail spécifique. La présentation de certaines productions d'élèves choisies par le chercheur-professeur comme pouvant illustrer les différentes compréhensions de la construction du nombre *à un temps donné* lors de l'incitation productive collective dans une classe de cours préparatoire lors de l'enquête mathématique sert à orienter les futures analyses par le recueil d'indices. Enfin, l'analyse de certains éléments signifiants de l'incitation productive collective, issus des transcriptions réalisent l'étude de deux notions, la cellule de diffusion/contagion et la dialectique expression-réticence.

1.1 Définition de l'incitation productive collective

Une première définition de « l'incitation productive collective », très générale, pourrait être décrite à partir de la forme de travail spécifique dans laquelle le professeur recherche la construction de l'*entente commune pour le déroulement de l'enquête mathématique*. Pour cela, le professeur et l'élève étudient le contrat/milieu dont l'enjeu est de permettre à l'élève de jouer au jeu demandé par le professeur. Pour l'exemple, développé ci-dessous, il s'agit de permettre à l'élève d'être en capacité de produire des écritures mathématiques sous certaines contraintes qui appartiennent à la situation.

Le professeur cherche à permettre, favoriser et développer la diffusion de connaissances entre les élèves avancés et les élèves moins avancés, diffusion dont l'enjeu est l'apprentissage/enseignement, c'est-à-dire l'élaboration collective de l'avancée du temps didactique pour la construction des savoirs.

1.2 Le travail sur la production d'hypothèses de l'incitation productive collective : vision générale

Notre hypothèse de travail concerne le *Journal du Nombre.* Nous pensons qu'il peut favoriser une forme de contagion épistémique des élèves avancés vers les élèves moins avancés, par le fait que certaines conceptions relatives à la connaissance diffusent, plus ou moins consciemment, d'un élève à d'autres élèves. Cela pourrait être en relation avec certaines modalités de travail, notamment ce que nous nommons *l'incitation productive dans le Journal du Nombre et le dispositif d'anticipation* (chapitre suivant). Dans ce qui suit, nous donnons à voir les effets de l'incitation productive dans le travail des élèves et du professeur. Nous reviendrons précisément sur cette modalité à la fin de cette partie.
Pour étudier cela, nous allons analyser la séance réalisée le 5 décembre 2013, centrée sur le jeu des annonces « dés et doigts ». L'enjeu de la séance consiste à faire produire par les élèves des annonces en trois termes contre un lancer en deux termes. Ici, par rapport aux « versions » précédentes mises en œuvre du jeu des annonces, la règle du jeu se complique puisque l'annonce sera « validée perdante », si et seulement si, elle est strictement supérieure au lancer de deux dés. Lors des annonces précédentes, l'élève cherchait à gagner en écrivant une égalité entre une annonce et un lancer. Maintenant, il doit *volontairement chercher à perdre*, tout en proposant des annonces plus grandes que le lancer. Par exemple, pour un lancer de 7 (5 + 2), l'élève jouera « à qui perd gagne » (au sens de l'ancienne version) : si son annonce est supérieure à 7, il aura produit une annonce perdante au sens de l'ancienne version du jeu, fondée sur l'égalité, mais il aura gagné au *nouveau jeu.*
Nous allons présenter la structure de la séance, à partir de l'intrigue, afin d'expliciter plus précisément ce que nous entendons par contagion épistémique des élèves avancés vers les élèves moins avancés. Le synopsis large et les transcriptions intégrales sont en annexes de la thèse. Cette intrigue va nous permettre de retracer le déroulement de la diffusion des notions mathématiques par contagion épistémique des notions mathématiques étudiées dans la séance, à partir des tours de paroles issus des transcriptions. Ensuite, nous rechercherons comment les significations produites au sein de l'incitation productive, c'est-à-dire situées au temps n-1 (avant la production dans le *Journal du Nombre)* peuvent permettre l'élaboration de productions chronogènes pour l'ensemble de la classe.
Étudions maintenant, à travers les différentes contraintes de la situation, les connaissances construites par les élèves dans le jeu. L'élève joue à produire une annonce en trois termes supérieure au lancer en deux termes.

2. LES SITUATIONS

2.1 La situation précédente

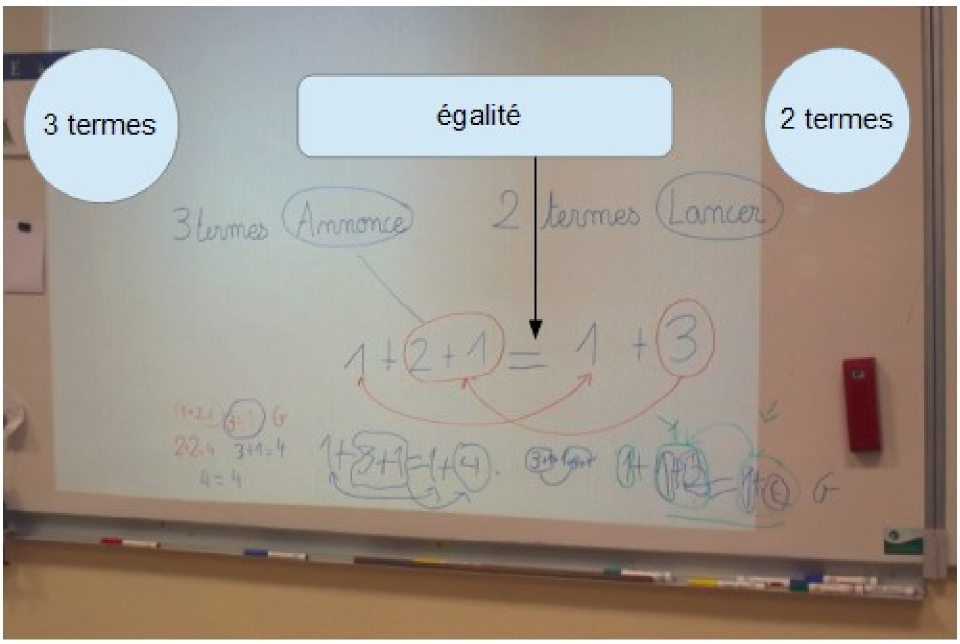
Les semaines précédentes, les élèves ont enquêté dans le *Journal du Nombre*, sur la notion d'égalité, à partir du jeu des annonces « dés et doigts ». La situation mise en œuvre consistait dans la production de deux écritures additives, une annonce et un lancer avec une contrainte spécifique. Il s'agissait de respecter un nombre de termes différent pour les écritures de l'annonce et du lancer.

Toutefois, le nombre représenté/désigné par chaque membre de l'équation (de chaque côté du signe « = ») était le même. Les élèves devaient produire des écritures différentes, en trois termes pour l'annonce tandis que le lancer était en deux termes. Une annonce gagnante était une annonce en trois termes *égale* à un lancer en deux termes.
L'élève est ainsi familiarisé non seulement à la recherche de la somme mais à la création d'écritures additives et au respect des contraintes propres au problème. Cette situation précédemment étudiée portait sur la notion d'égalité au sens large puisque l'élève comparait deux écritures additives. Celles-ci avaient un nombre de termes différents pour la désignation d'un même nombre. L'élève était alors producteur de ses propres problèmes à partir de la compréhension de la situation et de ses connaissances sur l'égalité.

Nous montrons la photographie d'une vue d'ensemble du tableau de la classe de CP, lors d'une étude sur l'égalité réalisée à partir de la situation décrite précédemment et qui consiste à produire une annonce en trois termes égale à un lancer en deux termes.

Dans ce qui suit, nous allons étudier plus précisément les dix-sept premières minutes de la séance (fichier vidéo 414) qui correspondent à la phase de « l'incitation productive collective » décrite ci-dessus. Elles permettent, selon nous, de centrer l'attention sur *l'action conjointe* lors de l'incitation productive collective. Nous formulons l'hypothèse que le savoir visé est complexe. Il doit *nécessairement s'accompagner d'une enquête mathématique.* A cette condition, l'élève peut produire des annonces dans le respect des contraintes de la situation/milieu. L'enjeu est la production d'annonces et de lancers par tous les élèves.

Incitation productive dans le *Journal du Nombre* (étude précédente), écrire des annonces en trois termes avec un lancer en deux termes mais les annonces sont gagnantes. Une annonce est gagnante, *si et seulement si*, elle est égale au lancer.



Photographie n°29 : vue d'ensemble sur l'égalité (tableau de la classe)
Date, novembre 2013

L'enquête sur l'égalité a permis à l'élève de jouer au jeu « du nombre qui s'occupe de deux nombres ». Nous voyons en effet ci-dessus, au bas du tableau, des annonces proposées par les élèves, par exemple 1 + 3 + 1 = 1 + 4. L'élève a regroupé les nombres 3 et 1 de l'annonce. Par le tracé d'une flèche, il indique la présence du groupement effectué dans le lancer par le nombre entouré. Il s'agit du nombre 4 (cf. le bas du tableau sur la photographie). Comme l'on dit les élèves, « le nombre 4 s'occupe des nombres 3 et 1 ».

2.2 La nouvelle situation, une annonce en trois termes supérieure au lancer en deux termes

Comme pour la situation précédente, il s'agit, pour l'élève, de percevoir que le nombre de termes de l'annonce est supérieur au nombre de termes du lancer puisque l'annonce comprend trois termes, contre deux termes dans le lancer. Ceci apparaît extrêmement simple. Pourtant, les caractéristiques liées au jeu des annonces « dés et doigts » rendent le savoir complexe. En effet, chaque écriture additive (l'annonce et le lancer) doit respecter les contraintes différentes de la situation. En effet, les contraintes ne sont pas les mêmes pour l'annonce et le lancer. Observons cela.
Dans l'annonce avec trois termes, chaque terme ne peut être supérieur au nombre 5 (en référence à la main). Nous connaissons l'importance du groupement de 5 dans la maîtrise de la numération. L'annonce sera comparée à un lancer en deux termes. Le lancer, lui, n'est pas contraint par la règle du « égal ou inférieur à 5 ». Chaque nombre qui compose le lancer peut atteindre le nombre 6. La référence associée au lancer est le dé (les constellations des points sur les faces du dé). La situation du jeu des annonces se joue avec deux dés, lors de cette phase du module. Si l'annonce peut être égal à 15 (trois mains), le lancer, lui, peut être égal à 12 (la somme de deux dés de 6). On le voit, chaque membre de l'écriture subit (et répond à) des contraintes différentes. Nous précisons le nombre minimum (la somme minimum) pour l'annonce et le lancer : 0 pour l'annonce (0+0+0) ; 2 pour le lancer (1 + 1). L'abréviation nA signifiant « nombre de l'annonce » et celle nL « nombre du lancer », on a donc pour le choix du nombre de l'annonce, les nombres possibles de 0 à 15 ($0 \leq nA \leq 15$), et pour le choix du nombre du lancer, les nombres possibles de 2 à 12 ($2 \leq nL \leq 12$). La contrainte de l'annonce supérieure au lancer rend invalide une annonce inférieure ou égale à 2.
Revenons à la contrainte de départ : l'annonce doit être perdante, selon les règles précédemment suivies. L'élève doit produire une annonce perdante, c'est-à-dire que l'annonce ne peut être égale au lancer. L'élève doit alors comprendre qu'il s'agit de produire volontairement des annonces perdantes au jeu des annonces, c'est-à-dire des inégalités, et qu'on a gagné au jeu didactique lorsqu'on est parvenu à produire volontairement des annonces perdantes. De plus, l'élève devra faire en sorte que cette annonce « non égale » soit *plus grande que le lancer.* Auparavant, l'élève gagnait en produisant dans le *Journal du Nombre* des annonces *égales* au lancer. L'élève pourrait penser qu'il n'y a point de difficulté puisque trois mains (5 + 5 + 5) sont nécessairement supérieures à deux dés (6 + 6). Pourtant, la situation est plutôt complexe. Nous envisageons quelques éléments de cette complexité, en nous plaçant du point de vue de l'élève et de ses connaissances et habitudes du moment.

Les trois termes de l'annonce peuvent correspondre à une annonce formée de trois termes identiques (trois nombres identiques). L'élève peut ainsi envisager l'annonce sous la forme 5 + 5 + 5. Ensuite, elle peut être comparée à un lancer de 6 + 6. L'élève, s'il désire proposer une autre annonce, doit envisager des modifications. L'élève pourrait choisir « d'abaisser » un doigt de chaque main, c'est-à-dire d'utiliser le nombre précédent (faire moins un). Il écrirait donc 4 + 4 + 4 > 6 + 6. Maintenant, l'annonce n'est plus valable dans les contraintes formulées du contrat actualisé puisque l'annonce et le lancer sont égaux. Ici, l'annonce ne respecte plus la contrainte de la supériorité de l'annonce sur le lancer. Plusieurs choix s'offrent à l'élève. Celui-ci peut accepter de modifier le lancer, changer l'annonce ou rechercher une nouvelle annonce et un nouveau lancer. En plaçant l'élève comme producteur de ses propres énoncés, la situation contraint l'élève à interroger le savoir de manière permanente puisque si l'annonce 4 + 4 + 4 respecte les contraintes de l'écriture notamment posséder trois termes composés chacun d'un nombre ≤ 5. Le lancer doit, lui aussi, respecter les contraintes associées à l'écriture avec deux termes dont chaque nombre est ≤ 6. Pourtant, l'étude mathématique ne peut s'arrêter là. La notion d'inégalité se code par l'exploration du signe mathématique « est plus grand que ... » (>) dont il convient de s'assurer, à la fois, de l'usage et du respect de sa signification mathématique. Pour cela, l'élève doit maintenant comparer l'annonce avec le lancer. Cela signifie une comparaison entre l'écriture de l'annonce et celle du lancer mais aussi/ou le nombre de l'annonce et celui du lancer (la somme). Il ne s'agit pas d'oublier que l'annonce doit être supérieure au lancer.

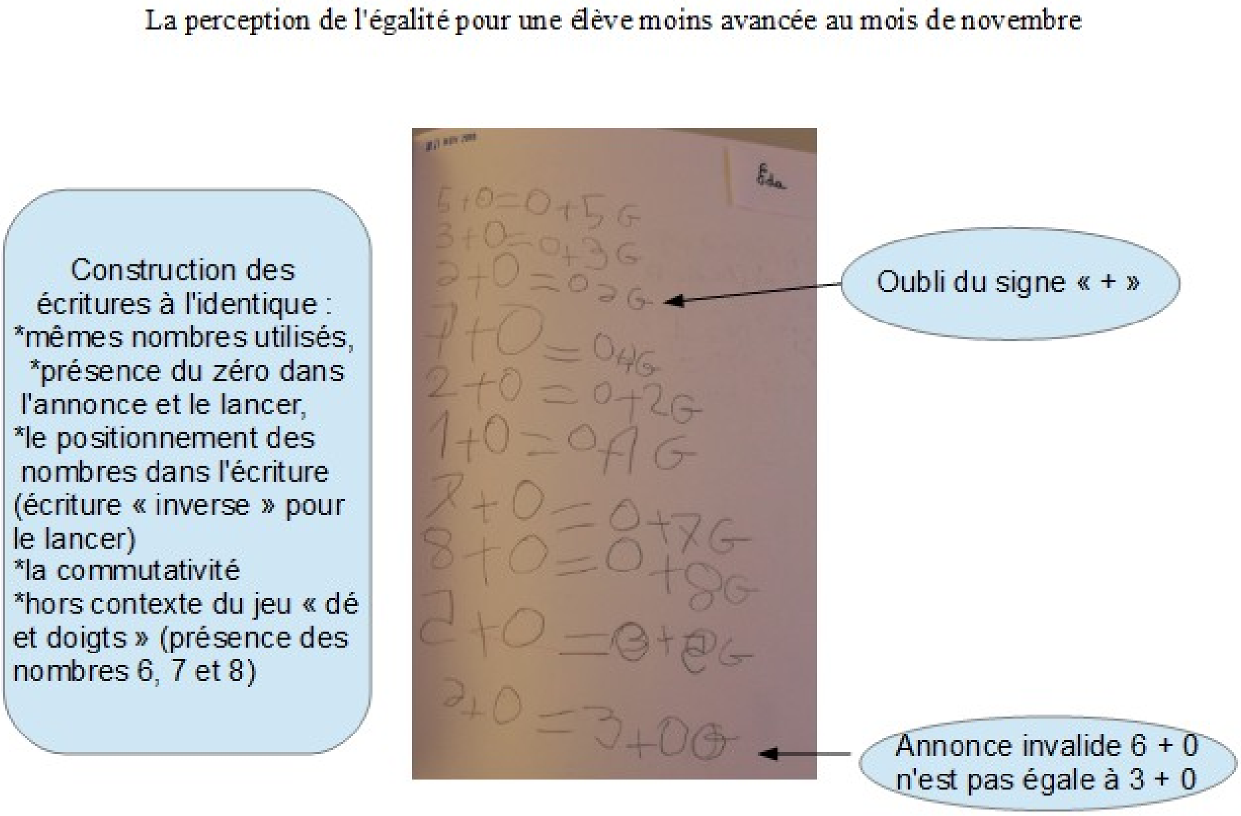
Le lancer ne peut rester noté de deux six dans le cas où l'écriture de l'annonce est envisagée, par l'élève, avec trois nombres identiques (comme 5 + 5 + 5), ceci afin de respecter les contraintes d'écriture (l'annonce en trois termes supérieure au lancer en deux termes). Le nombre 12 est la valeur maximale du lancer de deux dés de six. Cela pourrait entraîner l'élève à diminuer l'un des trois termes de l'annonce. L'annonce 5 + 5 + 5 deviendrait 5 + 5 + 4 ou 5 + 5 + 3, mais pas 5 + 5 + 2. La dernière annonce (5 + 5 + 2) ne peut être effectivement valide puisqu'elle est égale au lancer 6 + 6. L'action de l'élève pourrait alors concerner l'écriture de l'annonce avec la sélection de tous petits nombres. Cette fois-ci, il pourrait décider de la comparaison avec un lancer de « valeur » minimum, toujours le même parce qu'il apporte l'assurance d'être plus petit que l'annonce (par exemple 1 + 1).

L'élève intervient sur l'écriture du lancer, comme nous l'avons précisé, et il ne peut rester avec 6 + 6. Une autre option s'offre à l'élève, elle consiste à varier les nombres de l'annonce. Les nombres de l'annonce devront rester relativement petits afin d'être comparés au lancer en deux termes. Il s'agit de comparer une écriture avec une autre écriture qui a moins de termes (moins de nombres). Le lancer pourrait se définir comme un nombre juste plus petit que le nombre de l'annonce puisqu'avec une écriture identique (composée du même nombre, ici, le nombre 3) mais avec moins de termes (par exemple, 3 + 3 + 3 > 3 + 3). Une autre stratégie, peut-être plus élaborée, pourrait amener l'élève à envisager des groupements (deux termes de l'annonce contre un terme du lancer). Il resterait à l'élève à sélectionner et comparer un nombre ≤ 5 (le troisième terme) avec un autre nombre (le dernier terme du lancer ≤ 6). Ici, dans ce cas de figure, la connaissance du nombre-tout (la somme) n'est pas indispensable.

2.3 L'arrière-plan constitué d'une ébauche des situations dont va naître le projet du professeur

Le jeu des annonces « dé et doigts » permet à la classe de continuer et d'approfondir l'enquête/étude de la notion d'égalité. A partir de la formulation des contraintes de la situation en cours, (contraintes variables et évolutives puisque dépendantes de la situation étudiée) les élèves produisent des écritures mathématiques à partir desquelles ils étudieront et consolideront les connaissances sur l'égalité. Nous donnons ci-dessous l'exemple d'une situation qui demande une annonce en deux termes égale à un lancer en deux termes. Nous montrons la production d'une élève moins avancée, à la fin du mois de novembre. Elle produit de nombreuses écritures construites à partir de la même structure.

2.3.1 Le nombre zéro, élément neutre aide au codage de la commutativité dans la perception du nombre-tout



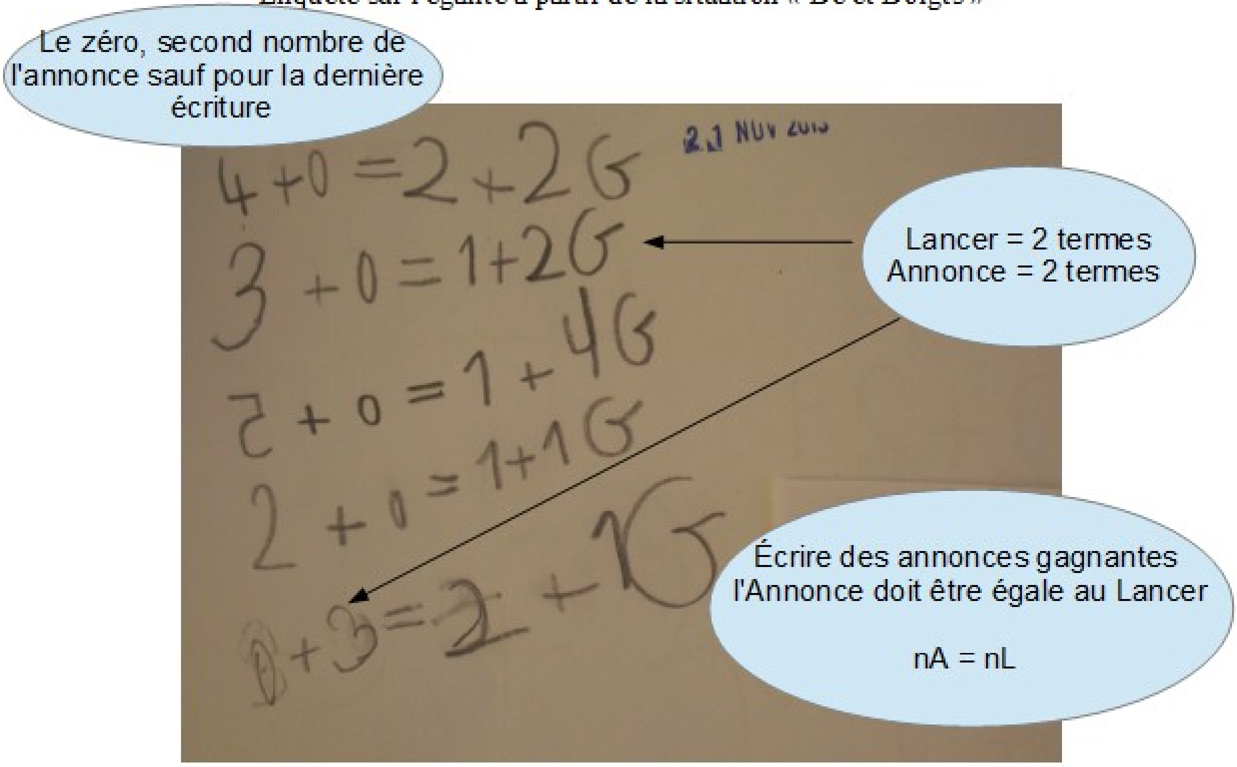
Photographie n° 30 : la commutativité et le zéro

Date, le 29 novembre 2013

Nous pensons que l'élève Hélène, auteur de la production, a des connaissances sur l'égalité même si celles-ci sont encore embryonnaires. Cela semble ressortir de l'ensemble des écritures puisqu'un nombre est égal à lui-même (une seule écriture est erronée (6 + 0 = 3 + 0), en fin de liste). Ainsi l'élève écrit 2 + 0 = 0 + 2 qui revient à 2 = 2. La production est néanmoins intéressante par l'utilisation systématique du zéro dans le respect de la contrainte des deux termes, à la fois, pour l'annonce et le lancer, même si le lancer ne peut comporter de zéro (sur le dé, la plus petite constellation est 1). Nous observons que l'élève joue avec une autre connaissance : la commutativité. Il semble que le nombre zéro soit considéré comme l'élément neutre puisqu'il autorise une sorte d'écriture à l'envers où la position/l'ordonnance des nombres est modifiée mais le choix des nombres reste identique et toujours relié au nombre-tout.

Pour mettre en lien différents travaux d'élèves afin de rendre compte de la pluralité possible des états de connaissance sur l'égalité présents dans une classe de CP à une période donnée (à un temps t de l'apprentissage), présentons maintenant une seconde production issue de la même situation.

Enquête sur l'égalité à partir de la situation « Dé et Doigts »



Photographie n° 31 : des annonces gagnantes

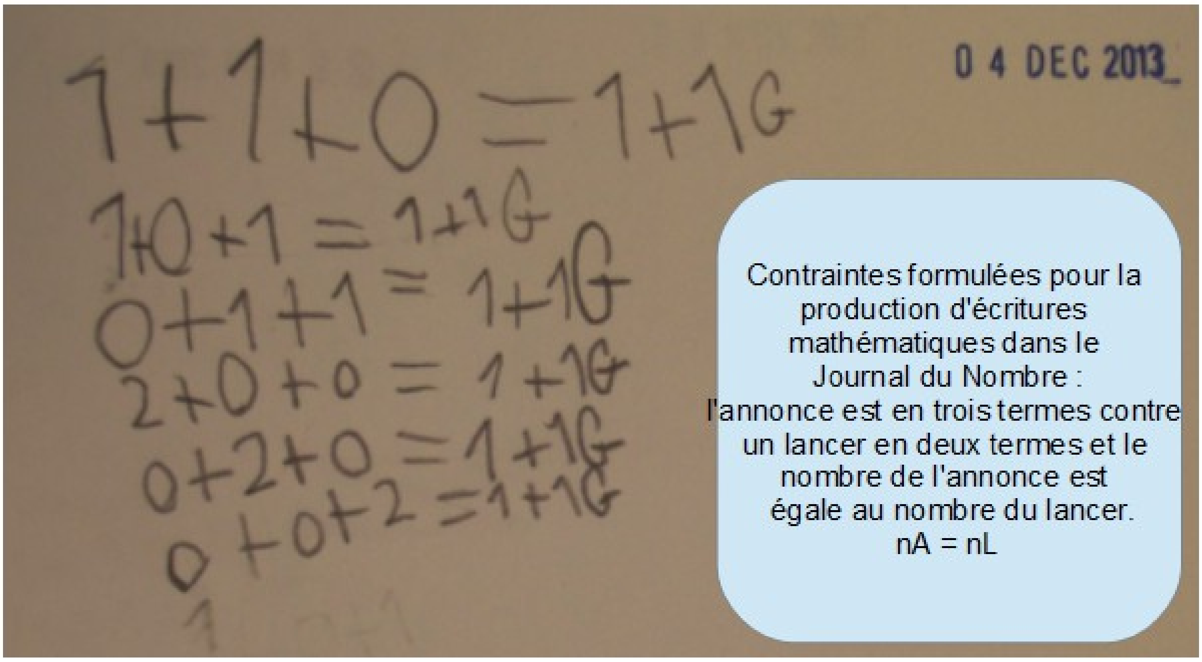
Date, le 29 novembre 2013

Ici aussi l'élève use du zéro mais de manière différente. Nous constatons sa présence dans l'écriture de l'annonce uniquement. L'élève intègre la contrainte liée à l'annonce. La main fermée représente et code le zéro. Le nombre est donc pensé comme un tout et le zéro sert à respecter la contrainte de deux termes. Ensuite, le lancer est perçu comme une écriture additive de ce tout, c'est-à-dire que 3 (noté 3 + 0 dans la production) c'est 1 + 2. L'élève utilise la référence du jeu des annonces (les expériences réalisées en atelier, son vécu du jeu « dé et doigts ») pour produire des écritures mathématiques copiant la réalité.

Ces deux productions semblent nous apprendre que les élèves de CP (en novembre) qui pratiquent ACE sont alors conscients que des écritures différentes puisque formées de nombres-parties différents représentent pourtant le *même nombre*. Les élèves varient les écritures par la présence du zéro, le changement de position des nombres dans l'écriture additive proposée et par l'usage de la propriété de la commutativité. Ces connaissances en cours vont-elles se consolider lors d'un changement de contrainte ? Le professeur décide de poursuivre l'écriture d'annonce gagnante dans le Journal du Nombre *mais* avec un changement de contrainte pour l'annonce. Il existe une rupture par rapport à l'expérience précédente. L'annonce sera constituée de trois termes et le lancer, quant à lui, sera toujours en deux termes. Pour l'élève, il s'agit d'écrire une annonce gagnante parce que l'annonce en trois termes est égale au lancer en deux termes. La production suivante illustre cette situation.

2.3.2 Des annonces avec et sans référence particulière

Poursuite de l'enquête mathématique sur l'égalité



Photographie n°32 : l'annonce en trois termes égale au lancer en deux termes

Date, le 4 décembre 2013

Nous formulons plusieurs remarques au sujet de la production ci-dessus. Celles-ci sont aussi en rapport avec les productions précédentes. L'annonce contient le nombre zéro et parfois celui-ci est présent deux fois dans l'écriture. Le lancer est toujours le même (1 + 1). L'élève perçoit sans doute intuitivement qu'il existe une infinité de désignation pour un même nombre. Cela montre également l'intérêt de rester longuement sur l'étude des petits nombres, et même, de très petits nombres dans la connaissance et la compréhension du système numérique. Ce travail, nous semble une illustration spécifique de l'étude de l'égalité d'un très petit nombre puisque toutes les écritures produites par l'élève « parle » le nombre deux. En fait, l'élève a écrit deux annonces différentes *du même nombre* qui a « décliné » à l'aide de la propriété de la commutativité. Par exemple, L'élève commence par écrire l'annonce 1 + 1 + 0, ensuite il produit 1 + 0 + 1. Puis il la note 0 + 1 + 1.

Pour décrire le procédé utilisé par l'élève, nous reproduisons les deux annonces d'origines suivies des annonces « dérivées » écrites dans le Journal du Nombre :

1 + 1 + 0 = 1 + 1 G (annonce d'origine)

1 + 0 + 1 = 1 + 1 G (annonce dérivée)

0 + 1 + 1 = 1 + 1 G (annonce dérivée)

La diagonale représentée par la flèche code la présence de l'élément neutre (le nombre zéro) dont la place varie dans l'écriture (dernier terme, terme du centre et premier terme dans l'annonce).

L'élève procède de manière siMartheire après avoir effectué un groupement 1 + 1 dont le calcul produit le nombre 2. Cette dernière écriture additive représente le nombre deux et crée un nouveau milieu-problème. Afin de respecter les trois termes de l'annonce, l'élève est contraint d'user deux fois du nombre zéro.

2 + 0 + 0 = 1 + 1 G (annonce d'origine)

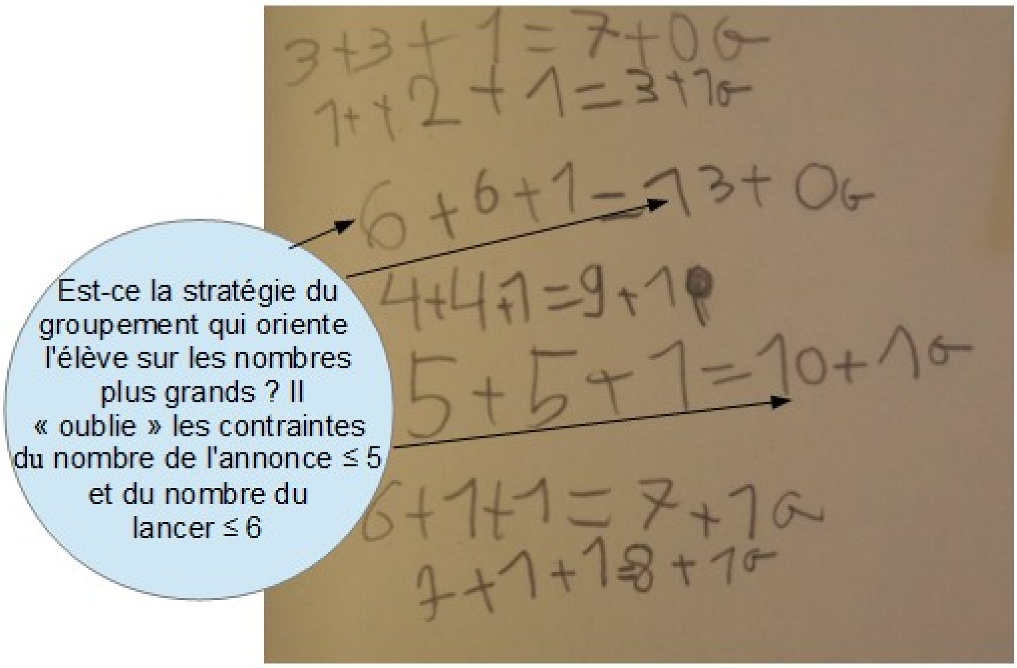
0 + 2 + 0 = 1 + 1 G (annonce dérivée)

0 + 0 + 2 = 1 + 1 G (annonce dérivée)

La diagonale représentée par la flèche code, cette fois-ci le nombre deux. C'est désormais le nombre deux qui occupe les différentes postions dans l'écriture additive (premier terme, terme du centre et terme final) complétée par la présence de deux zéros.

Une autre production d'élève ci-dessous met en évidence, elle aussi, la stratégie de groupement. Dans cette phase d'apprentissage, l'élève oublie les contraintes associées à l'annonce (le groupement de cinq puisqu'il y a cinq doigts sur une main) et celle concernant le lancer (les constellations du dé de 1 à 6). Même si les annonces ne peuvent être validées puisqu'elles ne respectent pas les contraintes, elles montrent des connaissances en gestation qui participent à la compréhension et la maîtrise du nombre.

L'annonce en trois termes est égale au lancer en deux termes mais ...



Photographie n°33 : le groupement

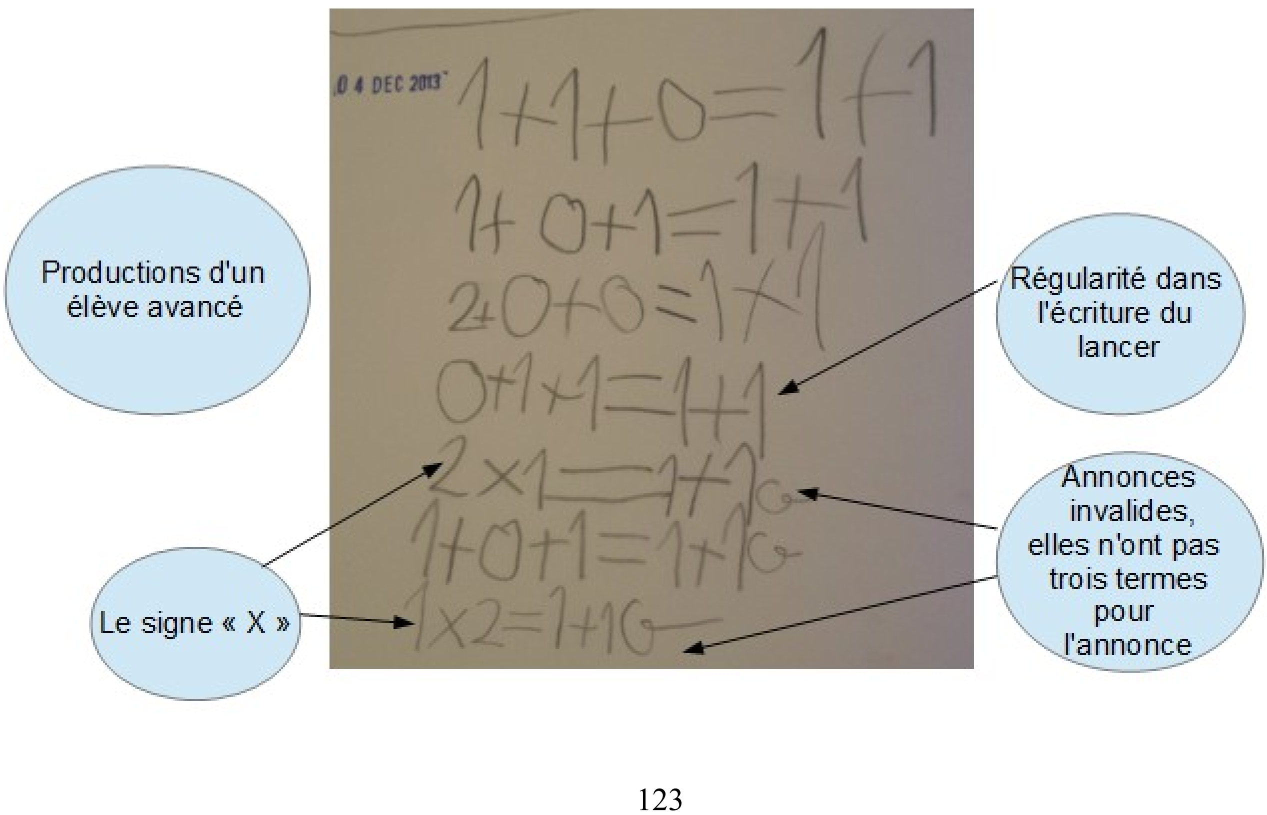
Date, le 4 décembre 2013

L'élève a produit des « histoires mathématiques vraies », pourtant ces écritures mathématiques ne fonctionnement pas avec les contraintes émises de la situation « dé et doigts ». L'élève a noté la lettre G pour gagnante mais l'annonce est invalide, même si, elle est vraie. Dans le cadre de ces contraintes, les écritures sont donc à revoir puisqu'elles dépassent le nombre de doigts possible sur une seule main ou il s'agit de la constellation du dé trop importante.

Pour continuer à montrer la multiplicité des connaissances en construction sur l'égalité, nous ajoutons à ces travaux la photographie du Journal du Nombre d'un élève avancé, Christophe, prise à la même époque. Christophe a deux grands frères, Basile est au collège en 4 ème et Jules en CM1dans la même école. L'écriture avec le signe fois, là encore, ne peut être acceptée même si elle est vraie puisqu'elle ne respecte pas la contrainte des trois termes pour l'annonce. Le signe apporté par Christophe dans son Journal du Nombre est la cause de deux écritures qui ne respectent pas les contraintes telles que 2 x 1 = 1 + 1 ou 1 x 2 = 1 + 1 mais ce signe va commencer à interroger les autres élèves de la classe. Nous remarquons qu'il utilise la commutativité pour coder l'annonce qui ne respecte pas les contraintes. Quelques jours plus tard, nous débutons le module « différence ». La seconde production, ci-dessous, appartient au Journal du Nombre de Christophe. Il expliquera que les opérations du type 3 – 6 sont égales à 0 puisque 3 – 3 c'est 0 et 6 c'est plus que 3. Pour l'instant, il ne sait pas comment noter que le résultat est encore moins que zéro. Nous décidons de ne pas dire que ces opérations du type 3 – 6 sont impossibles mais plutôt que l'on ne peut pas les calculer puisque c'est encore moins que zéro.

Des annonces dans le Journal du Nombre produites par un élève avancé

Variations autour des écritures sur le nombre deux



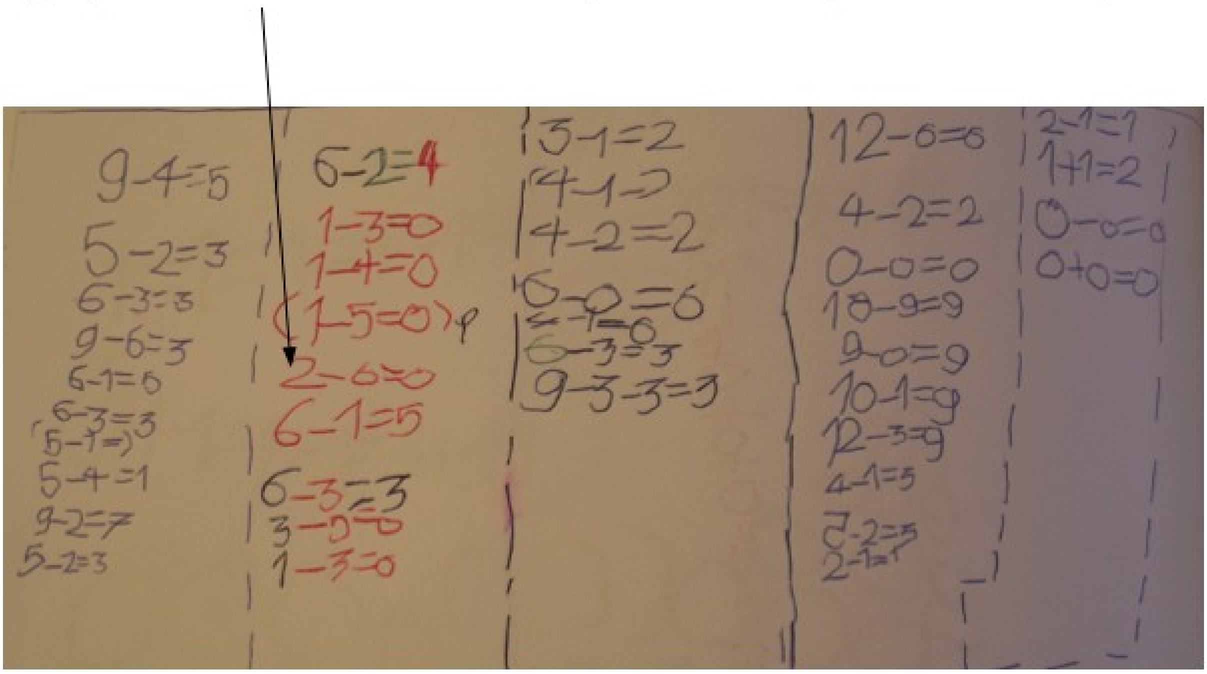
Photographie n° 34 : toujours le nombre « deux » et des signes mathématiques « + » et « x »

Date, le 4 décembre 2013

Lorsque Christophe présenta son travail à toute la classe, il annonça qu'il avait utilisé un nouveau signe mathématique. Certainement, les autres élèves ne le connaîtraient pas. Il mettait en garde toute la classe avec ces mots : *« attention, ce n'est pas un signe « + » mal fait. C'est un fois »*. Il eut la réponse-réaction de plusieurs élèves : *« je ne comprends pas »*. C'est à cette occasion que les élèves ont réalisé une première fausse rapide rencontre avec un autre signe mathématique. Nous disons fausse parce que la séance avec les calculatrices avaient mis en évidence la présence de plusieurs signes mathématiques dont le signe « x ». Ici, la différence consistait à comprendre, à parler, à lire l'écriture produite par Christophe pour pouvoir la discuter. Même si nous n'avons pas cherché à explorer la signification de l'écriture proposée (2 x 1 = 1 + 1), elle fut déclarée invalide puisque l'annonce ne contenait pas trois termes. L'auteur de la production (Christophe) a regardé son travail et dit : « ha ». Il admettait que l'annonce avait deux termes au lieu des trois termes demandés. Il se « rendait » à la décision du groupe puisqu'il n'avait pas de modifications à proposer (à ce moment-là).

La production suivante appartient au Journal du Nombre de Christophe (notre élève de la production précédente). Il s'agit de l'étude réalisée le 17 décembre 2013. Le travail demandé par le professeur s'ancrait dans l'enquête/étude de la différence. Il consistait à lancer un dé qui codait la différence. Par exemple, le dé lancé indique trois, l'élève doit rechercher toutes les différences qu'il connaît égales à trois (le nombre du dé lancé). Puis, l'élève lance à nouveau le dé et cherche de nouvelles décompositions pour ce nouveau nombre-différence/écart. Ensuite, le travail se poursuivait par la sélection d'un autre nombre (avec le lancer de dé) pour lequel l'élève procédait de manière identique. Cette situation se déroulait hors de la référence du jeu des annonces et consistait en la mobilisation par l'élève de différentes connaissances. Nous désignons toutes les connaissances (les connaissances anciennes, en cours d'élaboration, nouvelles et personnelles).

A cette période, [illegible] – 6 = 0
puisque 2 – 2 c'est 0 et 6, c'est encore moins que [illegible]...ensuite, il parlera de nombres négatifs.



Photographie n°35 : les différentes désignations

Date, le 17 décembre 2013

La production nous semble fort intéressante parce qu'elle ne respecte que *partiellement* la consigne émise par le professeur. Il s'agit, rappelons-le, de la production d'un élève avancé. Outre le point déjà souligné sur les désignations/opérations moins que zéro, que nous apprend ce travail ?

L'élève semble avoir le projet de respecter l'étude proposée puisqu'il prépare l'espace. Il sépare la feuille du Journal du Nombre en cinq colonnes effectives. Nous faisons l'hypothèse qu'il a sans doute prévu l'étude de cinq nombres différents/cinq nombres-écarts (cinq lancés de dé). Pourtant, nous constatons que la production de l'élève, toutes les écritures ne représentent pas entièrement cela. Elles montrent des désignations différentes pour un même nombre et elle affiche *aussi* une autre catégorie d'écritures. Si nous l'observons, nous identifions deux types d'écriture bien distinctes.

2.3.3 Les connaissances déclaratives

Le premier type d'écriture renvoie à l'étude en cours sur les différentes désignations d'un nombre. Par exemple, le nombre trois se trouve représenté par plusieurs écritures mathématiques comme 5 – 2 = 3, 6 – 3 = 3 et 9 – 6 = 3. Ce sont des écritures issues de la première colonne (elles sont présentes sur la deuxième, troisième et quatrième ligne). Elles sont conformes à la contrainte formulée et codent toutes un écart de trois désigné par le lancer de dé.

Il existe un second type d'écriture qui n'est pas strictement en relation avec l'étude des désignations différentes d'un même nombre représentant un écart/différence. Ces dernières écritures sont donc encore une fois non conformes puisqu'elles ne respectent pas la contrainte. Pourtant elles sont vraies. Regardons ce qui semble se construire dans cette seconde catégorie d'écritures. Chaque écriture notée reprend un terme (un nombre) de l'écriture précédente afin de produire une nouvelle écriture. Il semblerait que le nombre sélectionné (par exemple, le nombre cinq pour la première écriture de la première colonne) fonctionne comme une « amorce » et un « appel » à d'autres nombres *en relation avec celui-ci.* Nous nous expliquons. La production de l'écriture 9 – 4 = 5 pour la représentation/désignation du nombre 5 est conforme. La différence entre les nombres 9 et 4, c' est 5. Elle provoque une écriture dérivée (5 – 2 = 3). Et, à nouveau, cette première écriture dérivée impulse une seconde écriture dérivée (6 – 3 = 3). Pourquoi un élève avancé, porteur de signes mathématiques nouveaux comme le signe « fois » dans le Journal du Nombre est-il amené à produire ce type d'écriture mathématique ?

Il nous semble que ce sont les connaissances déclaratives qui parlent et s'interposent entre la contrainte formulée et la production d'écritures. Nous pensons que l'élève obtient le nombre 5 par le lancer de dé qu'il code par la désignation 9 – 4 = 5. Le nombre 5, à son tour, appelle et produit une autre décomposition qui est bien sûr en relation avec le nombre cinq. La production écrite semble traduire quelque chose de plus complexe. Ce n'est plus *exactement* le nombre cinq mais la relation au nombre cinq. La relation entretenue dans et avec d'autres nombres en lien avec le nombre cinq. L'élève aurait pu écrire 3 + 2 = 5 seulement il est dans l'utilisation du signe « - » (le module *Différence*). Il est donc tenté d'écrire une décomposition additive avec le signe « - ». Il produit la décomposition suivante 5 – 3 = 2 puisque nous venons de voir que 2 + 3 = 5. Le nombre cinq n'est plus le calcul ou le nombre choisi mais le terme d'une seconde écriture additive que nous appelons une *écriture additive dérivée*. Maintenant, c'est au tour du nombre 3 de provoquer une autre amorce différente. C'est la relation au nombre trois qui s'impose. Elle parle les notions de moitié et de double. Il s'agit bien, encore une fois, d'une relation plus lointaine avec le nombre cinq parce que si 3 est la moitié de 6, le nombre 6 est juste un de plus que 5 ($5 + 1 = 6$). Il s'agit de la relation « un de plus » qui représente le successeur. C'est également la connaissance du double puisque $3 + 3$ c'est 6 qui pourrait amener l'élève à produire $6 – 3$, c'est 3. Ces deux types de productions coexistent dans le travail photographié de l'élève issu du Journal du Nombre et cela dans plusieurs colonnes. Ryle G. La notion d'esprit, pour une pratique des concepts mentaux (1978)

2.4 La genèse du projet du professeur

Le professeur remarque un accroissement des échanges entre les élèves lorsqu'une production ne respecte pas les contraintes. Il pense alors que ce type de production recèle un certain intérêt didactique et pédagogique, et notamment dans l'élaboration du savoir. *La production qui ne respecte pas les contraintes* semble permettre la création d'un fort débit d'échanges entre les transactants. Ceux-ci sont centrés sur le pourquoi du refus mais également sur la validité probable (après un débat centrée et soutenu autour la-dite production). Ces échanges dont l'enjeu est le savoir, oeuvrent à l'avancée du temps didactique, à la cohésion du groupe-classe et à l'enseignement/apprentissage puisqu'ils ancrent les contraintes dans la réalité. Il semble donc se nouer une relation spécifique sur le savoir par l'observation/discussion collective « libre » autour/sur la production qui ne respecte pas les contraintes évoquées lors de la situation. Les élèves discutent sur le savoir montré via la production de tel élève mais celle-ci pourrait être anomymée. C'est le savoir et non l'auteur de la production qui importe. Il existe un espace de dialogue destiné à tous les élèves : avancés, moins avancés, de même, aux élèves strictement dans le contrat. Tous participent à l'élaboration des connaissances. Tous interagissent. Les élèves formulent des arguments en fonction de l'écriture produite dans la situation étudiée mais ils peuvent proposer aussi une contre-argumentation. Ils se parlent et se répondent sur des écritures mathématiques. Ils apprennent ainsi à réfuter et à tester leur argumentation par rapport à la modélisation mathématique du jeu « Dé et doigts » qui représente les phénomènes mathématiques de la réalité. Ils apprennent ainsi à maîtriser ces phénomènes puisque par exemple, l'élève ne peut écrire de zéro dans le lancer parce qu'il n'y a pas de zéro sur le dé. Le débat se déroule à l'intérieur de la sphère groupe-classe. La classe partage les mêmes références, les mêmes situations. Un élève, seul dans son Journal du Nombre, peut « oublier » temporairement les contraintes pris par l'élan de produire de nombreuses écritures ou son désir d'exploration croissant. L'intérêt du groupe-classe est donc de garantir la mémoire des situations et la permanence des contraintes associées par les échanges toujours renouvelés par la discussion. C'est la participation de tous les élèves, à tous moments avec d'une intensité variable (par la quantité, le nombre d'interventions, la durée, la fréquence, la nature...) qui revivifient les contraintes actuelles et précédentes. Pour cela, l'élève use de la comparaison. Les éléments essentiels sont rappelés mais nous notons que ce rappel, cette remise en mémoire n'est pas forcément de l'initiative du professeur. Il semblerait que ce soit la modalité spécifique du débat qui favorise cela.

A d'autres moments bien entendu, l'élève fait « parler » les nombres, « jouer » les nombres pour eux-mêmes (cela sans référence particulière). L'élève produira ainsi des écritures mathématiques qui ne reprendront pas la contrainte du groupement ≤ 5 pour l'annonce ou celle de l'absence de zéro pour le lancer puisque celui-ci n'est pas présent sur le dé. L'élève cherchera à adapter les phénomènes appréhendés dans la situation du jeu des annonces, la référence « Dé et doigts ». Il explorera dans un contexte modifié (puisque sans référence particulière) les propriétés découvertes telles que la commutativité, l'élément neutre mais également, l'élève *expérimentera à nouveau* les stratégies comme le groupement.

2.5 Le projet du professeur

Le professeur décide de continuer l'exploration de l'égalité. Nous retraçons brièvement la chronologie des différentes études. Il y eu tout d'abord l'annonce en deux termes égale à un lancer en deux termes puis l'annonce en trois termes égales à un lancer au deux termes. Mais les élèves ont étudié également une annonce gagnante parce que supérieure au lancer avec un nombre de termes différents pour chaque membre (l'annonce en trois termes et le lancer en deux termes). La situation « contraire » n'est pas oubliée avec l'annonce gagnante lorsque celle-ci est inférieure au lancer. A chaque fois, le professeur constate que la discussion sur les productions qui ne respectent pas les contraintes amène les élèves à étudier en profondeur les critères en cours de la situation mise en œuvre et à cerner davantage l'enjeu de l'enseignement/apprentissage.

2.5.1 La discussion sur une production qui ne respecte pas les critères renforce-t-elle la compréhension et la maîtrise des critères étudiés ?

Puisque le non respect des contraintes constaté dans certaines productions écrites favoriserait davantage la discussion, le professeur envisage de travailler cet élément spécifique. Pour cela, il pense demander aux élèves de produire volontairement des annonces perdantes. Nous rappelons que le terme « annonce perdante » signifie que l'annonce n'est pas en adéquation stricte avec les critères retenus et formulés lors de l'étude de la situation en cours. Comment le professeur pourrait-il alors concevoir ce nouveau milieu-problème ?

L'enjeu, nous insistons, consiste dans la production d'annonces perdantes puisque celles-ci ne respectent pas les contraintes énoncées. Il est nécessaire tout d'abord de sélectionner la situation dans laquelle va se dérouler l'enquête/étude relatif au milieu-problème. Ensuite, le professeur envisage de répertorier a priori les critères de non respect des contraintes et de constituer une rapide classification de ceux-ci avant l'étude spécifique par les élèves. Le professeur fait l'hypothèse que ce nouveau milieu-problème pourrait être profitable à l'enseignement/apprentissage. Il augmenterait le gain (de connaissances) de tous les élèves.

2.5.2 Le milieu-problème dans lequel va se dérouler l'étude/enquête de la production d'annonces « perdantes »

Le professeur choisit d'inscrire l'enquête/étude dans la poursuite de la situation précédente. Celle-ci consiste à produire une annonce en trois termes égale à un lancer en deux termes. Chaque membre de l'écriture répond à des critères spécifiques comme nous l'avons précédemment explicité. Pourquoi le professeur choisit-il cette situation ?

Les élèves connaissent la situation puisqu'ils ont travaillé dans ce milieu-problème. Pour le professeur, il s'agit de poursuivre l'enquête/étude par une voie différente mais dont l'enjeu est toujours l'étude de l'égalité. Si nous reprenons notre idée de paysage didactique, il s'agit pour le professeur d'orienter le regard des élèves sur une partie précise du paysage. En somme, il réalise un zoom dont le but est une compréhension plus profonde de l'ensemble du paysage par une étude spécifique du « terrain » (un morceau du paysage) via des connaissances spécifiques. La connaissance de tous les « recoins/terrains » renforce la vision générale/la connaissance générale. La recherche du professeur est la suivante : permettre aux connaissances spécifiques d'aider à l'élaboration et au renforcement des connaissances générales sur la notion d'égalité, mais également utiliser les connaissances générales pour mieux appréhender les connaissances spécifiques. Pourtant, dans le milieu-problème déjà proposé existe un déséquilibre. Le déséquilibre est provoqué par la nature de la demande du professeur. Celle-ci est inhabituelle puisqu'elle invite à produire une annonce qui ne respecte pas les contraintes énoncées. Cela n'appartient pas au contrat scolaire habituel ordinaire de l'école. A l'école, le professeur ne demande généralement pas à l'élève de produire une écriture mathématique qui ne respecte pas les contraintes étudiées, bien au contraire. Ces écritures qui ne respectent pas les contraintes sont d'ordinaire rangées ou classées dans la catégorie des « productions erronées », c'est-à-dire des « erreurs ».

2.5.3 Les critères répertoriés

Nous répertorions les critères qui déterminent une annonce qui ne respecte pas les contraintes. L'écriture peut tout simplement ne pas contenir le nombre de termes indiqués : trois pour l'annonce et deux pour le lancer. Ensuite, elle peut ne pas comprendre le signe mathématique codant l'égalité (absence du signe « = »). L'écriture peut également contenir des « oublis » de signes comme par exemple l'absence du signe « + ». Nous ne retenons pas le tracé des nombres à l'envers comme critère de refus. Le choix des nombres pour l'écriture peut entrainer la production d'une annonce qui ne respecte pas les contraintes si le choix des termes de l'annonce sont supérieurs à 5 et ceux du lancer supérieurs à 6. De plus, la somme des nombres de l'annonce peut ne pas être égale à la somme des nombres du lancer. Ensuite, le plus petit lancer ne peut être ≤ 2 puisqu'il est constitué de deux dés (1 + 1). L'annonce possible et égale à zéro (deux mains fermées) ne peut est acceptée car il n'existe pas de lancer égal à cette annonce.

2.5.4 Une rapide classification

Une annonce qui ne respecte pas les contraintes est donc une annonce que l'on peut caractériser selon quatre axes.

Elle n'intègre pas les contraintes d'écriture dans le choix des nombres. Ces nombres sont fonction du membre auxquels ils se rapportent : l'annonce ou le lancer et ils sont régient par des critères spécifiques (le groupement par cinq pour l'annonce en référence à la main et les constellations de 1 à 6 pour le lancer).

Elle contient des erreurs sur la somme de l'annonce (le nombre-tout représentant le nombre codé par les trois termes de l'écriture additive), la somme du lancer (le nombre-tout représentant le nombre codé par les deux termes de l'écriture additive) et/ou la comparaison effective entre la somme de l'annonce et la somme du lancer n'est pas juste.

Les stratégies de comparaison sont erronées. L'élève n'utilise pas le calcul mais procède par comparaison/reconnaissance de termes identiques de chaque côté du signe égal. En cas d'absence de termes identiques, il cherche alors à combiner des termes (regrouper) ou même à dégrouper afin d'ajuster une écriture additive à l'autre. Il reste ensuite à comparer ce qui est différent (l'élément différent/le terme différent).

Les domaines de la validité de chaque catégorie, l'annonce et le lancer ne sont pas pris en compte. Pour l'annonce, le nombre le plus grand ne peut *excéder 10* codé par les dix doigts des deux mains alors que le nombre du lancer pourrait, quant à lui, être 12 codé par deux lancés de 6. Au sujet du plus petit lancer, celui-ci ne peut être inférieur à 2 puisqu'il y a deux dés (1 + 1). Il n'y a pas de zéro sur le dé. L'annonce vraie 0 + 0 ne peut être comparée à un lancer égal à 0 + 0 pour le motif déjà évoqué. Maintenant, nous présentons l'intrigue et les différentes phases de la séance du 5 décembre.

3. LA MISE EN INTRIGUE DE LA SÉANCE DU 5 DÉCEMBRE 2013

3.1 Phase 1 : La mise en place du décor de la scène didactique (le travail dans le contrat)

Le professeur annonce un changement dans les contraintes de la situation du jeu des annonces « dés et doigts ». Il commence par dire : « aujourd'hui, on ne va pas écrire des annonces gagnantes... ». Il désirait que les élèves produisent des annonces perdantes à partir d'annonces gagnantes (déjà écrites dans le Journal du Nombre). Le professeur n'a pas le temps de terminer sa phrase ni d'expliciter le changement de contrainte. Un élève, George, propose d'écrire des annonces perdantes. L'élève rit et propose de jouer à perdre. Le professeur explique que ce n'est pas exactement ce qui est prévu, dit qu'il va voir. Le professeur cherche ainsi à gagner un peu de temps. Il voudrait réfléchir à la proposition émise par l'élève (George). La situation n'a pas été anticipée pour se dérouler selon les modalités proposés par George. Le projet du professeur est essentiellement collectif dans la phase de démarrage. Il a anticipé deux axes de travail possibles : toujours à partir des productions réalisées précédemment dans le Journal du Nombre, sélectionner une annonce qui respecte les contraintes et/ou une annonce qui ne respecte pas les contraintes. L'axe 1 du travail envisagé concentre l'étude des modifications à apporter à l'annonce qui respecte les contraintes pour être hors des contraintes. L'axe 2 est une étude « en quoi » l'annonce hors jeu la dernière fois et gagnante maintenant. En même temps, le professeur ne souhaite pas refuser une situation-problème dont un élève s'est emparée. La séance se poursuit avec la question non tranchée. Le professeur revient sur la situation précédente (à l'origine de son projet) et reconstruit les contraintes avec la participation des élèves. Lorsque le professeur s'apprête à énoncer le changement de contrainte (retour au projet initial/professoral), les élèves proposent d'écrire des annonces perdantes. Ils reprennent l'idée de la proposition émise par George en début de séance. Nous précisons que c'est le professeur qui attire l'attention des élèves sur la rupture dans le contrat en début de séance. L'élève George s'était glissé dans cette « ouverture » (la rupture annoncée) pour faire une proposition. Ensuite, la question n'a pas été rejeté fermement par le professeur. L'expression du professeur « on va voir » fonctionne un peu comme un « accord » puisque la reprise de la proposition d'écrire des annonces perdantes est plutôt massivement énoncée par la classe. Un autre élément est d'importance. Les élèves ont toujours écrit des annonces gagnantes dans le jeu des annonces. La proposition d'George fournit l'occasion de transgresser la règle du contrat classique. A l'école, l'élève écrit des réponses justes et non volontairement des réponses erronées. Ici, l'élève « perd » au jeu des annonces et gagne au jeu didactique. Habituellement, les annonces produites étaient gagnantes, comme nous l'avons précisé, parce que celles-ci étaient égales au lancer. Le début de la séance est un rappel de la situation précédente et des contraintes au sujet de l'écriture de l'annonce et du lancer. Ainsi, la classe se rappelle que l'annonce est formée avec trois termes, trois nombres. La mémoire du jeu avec deux dés, quant à elle, remémore les deux termes de l'écriture du lancer.

A l'origine de la séance, le professeur avait l'intention de travailler sur l'inégalité à partir des écritures des annonces gagnantes produites lors de la séance précédente. Le projet professoral consistait en la production d'une ou plusieurs écritures d'annonces perdantes. L'élève était mis en situation d'écrire des annonces perdantes dans le Journal du Nombre, à partir des annonces gagnantes (de la séance précédente). Le professeur pensait procéder de la façon suivante. La situation permettait un retour organisé sur les écritures produites et datées dans le Journal du Nombre. L'élève observait ses productions (les annonces gagnantes) et sélectionnait une écriture pour une étude collective. La classe validait selon deux arguments : la conformité de l'écriture avecle choix des nombres en fonction des critères du milieu-problème (les contraintes de la situation : pas de nombres supérieurs à 5 pour l'annonce et pas de zéro pour le lancer, par exemple) et le résultat du calcul (l'annonce et la lancer pouvaient être vrais mais la relation d'égalité n'était pas juste). De ce travail/étude découlait la production d'une annonce « dérivée ». Cette dernière ne devait pas respecter les contraintes, l'écriture et/ou le calcul serait erronée ou les deux. La situation favorisait la production d'écritures perdantes, des écritures qui volontairement ne respectent pas les contraintes du milieu-problème. En fait, la situation fournissait l'occasion à l'élève de mener *autrement* l'enquête sur les contraintes de la même situation vécue précédemment. Pour cela, le professeur modifiait la variable d'écriture (produire des écritures perdantes). Les contraintes de la situation d'origine ne sont pas changées. La rupture concerne les contraintes de la production d'écriture dans le Journal du Nombre. Finalement, l'élève devait écrire à partir d'une annonce gagnante, des annonces perdantes en appui sur la situation précédente. En effet, il ne s'agissait pas de parler de gain mais de produire des écritures qui montrent le non-respect des contraintes afin de mieux les appréhender et les intégrer dans les écritures mathématiques. Le professeur pensait à ce travail spécifique pour davantage comprendre et maîtriser les contraintes de la situation. L'enjeu devait se centrer sur le travail des contraintes et des limites afin d'approfondir la notion de l'égalité et de l'inégalité.

Un élève, George, vient modifier le projet du professeur. Il souhaite produire des annonces perdantes et obtenir le gain avec celles-ci. La proposition émane d'un élève moins avancé. Le professeur reporte finalement son projet initial. Il s'empare de la proposition d'George. Pourtant, il existe une certaine difficulté dans la présentation du nouveau jeu ainsi produit. Elle consiste à comprendre que le gain *didactique* s'obtient par des annonces perdantes. L'annonce est « perdante » ce qui signifie que l'élève produit volontairement une annonce hors des critères définis conjointement et cela pour gagner au jeu didactique. Cette production « en dehors » des contraintes de la situation serait la « preuve » de la maîtrise des contraintes puisque l'élève devrait expliciter et prouver le pourquoi de l'annonce perdante. L'élève perd donc au jeu des annonces. Pourtant, l'élève gagne au jeu didactique. Même si le professeur anticipe ici une source possible de difficultés, il choisit de privilégier la proposition de l'élève moins avancé. Les projets du professeur et de l'élève concernent tous les deux la question de l'inégalité et le non-respect des contraintes initiales. Toutefois, ils possèdent quelques points de divergence et notamment sur la notion de gain. C'est en cela que les projets du professeur et de l'élève divergent. Le professeur comprend que la notion de gain (le gain au jeu des annonces à différencier du gain au jeu didactique) risque d'être une source importante d'ambiguité. Le professeur décide de s'engager dans la proposition de l'élève. La situation proposée par George est aussi nettement plus complexe que celle prévue par le professeur. Le travail envisagé par le professeur partait de l'écriture d'une annonce gagnante (déjà réalisée dans le Journal du Nombre) et, à partir de l'annonce gagnante lors de la séance précédente, l'élève produisait une écriture « en réponse » (hors des contraintes/ « perdante ») par rapport à l'écriture dans le respect des contraintes. Il n'était pas question de gain.

3.2 Phase 2 : Le changement de contrainte (l'annonce supérieure au lancer)

La phase suivante concerne la mise en évidence du changement de contrainte du contrat. Précédemment, l'annonce devait être égale au lancer pour obtenir le gain. Maintenant, l'annonce sera différente du lancer. Pour être différente, l'annonce devrait être supérieure au lancer. Le professeur pourrait se contenter de noter les contraintes sélectionnées de la situation sur le tableau. Puis, il demanderait aux élèves de rechercher dans le Journal du Nombre des écritures en rapport avec les critères. Cela reviendrait à montrer un exemple qui représente « la loi ». L'élève appliquerait. Ce n'est pas ce que recherche le professeur. Afin de construire une référence commune à la classe, avant le travail individuel dans le Journal du Nombre, le professeur entreprend l'étude d'une annonce en trois termes. Un élève vient au tableau et propose l'annonce suivante « 4 + 4 + 4 » . Celle-ci est rapidement validée puisqu'elle répond à la contrainte des trois termes. De plus, elle peut être réalisée avec trois mains. Nous remarquons que l'annonce n'est pas proposée par le professeur mais par un élève. L'annonce de l'élève permet au professeur d'élaborer un premier « accord » sur la représentation possible d'une annonce en trois termes même si celle-ci est d'un type particulier (trois termes identiques). L'entente commune va se poursuivre, à partir de la spécificité de l'annonce, les élèves vont étudier conjointement le contrat/milieu. Puis, à partir de l'entente commune « spécifique » (trois nombres identiques), l'élève pourra mener l'enquête du milieu-problème dans le Journal du Nombre. Il construira, à la fois, des productions spécifiques et des productions génériques pour une enquête dans un savoir complexe.

3.3 Phase 3 : Le nombre de l'annonce, connaissance indispensable (mais pas vraiment) pour le lancer

La suite du travail consiste à pouvoir proposer un lancer plus petit que l'annonce. C'est une caractéristique du nouveau contrat qui définit l'annonce perdante. Pour cela, les élèves doivent se mettre d'accord tout d'abord sur le nombre de l'annonce représenté par « 4 + 4 + 4 ». Pourtant, il existe un désaccord sur le nombre-tout (qui correspond à la somme 4+ 4 + 4). Les nombres proposés par les élèves sont les suivants 14, 13 et 12. Le professeur écrit le signe « = » à la suite de l'annonce en trois termes afin d'aider à la recherche de la somme. Sur le tableau, le professeur écrit les propositions des élèves écrit « 4 + 4 + 4 = 14 », « 4 + 4 + 4 = 13 » et « 4 + 4 + 4 = 12 ». Des élèves pensent alors qu'il s'agit du lancer puisque le nombre se trouve à droite du signe « = ». En effet, un élève propose d'invalider « ce lancer » puisque le lancer doit comporter deux termes. C'est au tour d'un autre élève de proposer d'ajouter un zéro pour respecter la contrainte des deux termes dans l'écriture du lancer. La question du zéro pour le lancer est posée. Le même élève, celui qui rejetait le lancer avec un seul terme (14), précise pourquoi le zéro ne peut être écrit : dans le lancer, la notation du nombre zéro est impossible puisqu'il n'y a pas de zéro sur le dé (l'élève fait référence aux constellations du dé). L'argument est accepté. Donc, dans l'écriture du lancer, il ne peut exister le nombre zéro.

3.4 Phase 4 : L'élaboration de la certitude raisonnée au moyen de la ligne graduée

Pour trancher le désaccord sur la somme de l'annonce, le professeur affiche la ligne graduée sur le tableau. Il questionne les élèves sur le moyen d'obtenir la preuve qu'il s'agit bien du nombre 12. Pour cela, un élève réalise les trois « bonds » de l'annonce (4 + 4 + 4), sur la ligne graduée du tableau. Maintenant, il semblerait que l'ensemble de la classe choisisse de désigner le nombre 12 comme représentation de l'annonce 4 + 4 + 4. Le professeur continue d'exiger la preuve. Des élèves montrent alors leurs doigts, d'autres calculent. Le professeur s'obstine. Il garde l'attention de tous les élèves sur la ligne graduée. Comment la ligne graduée peut-elle servir de preuve ? Un élève, alors, explique que c'est forcément 12 puisque c'est deux carreaux après le tiret de dix.

3.5 Phase 5 : Le lancer le plus petit

Maintenant, les élèves savent, ils connaissent le nombre désigné par l'écriture additive « 4 + 4 + 4 ». Cette connaissance peut leur permettre de proposer un lancer adéquat, c'est-à-dire plus petit que l'annonce. Rappelons que la contrainte est la suivante : l'annonce (3 termes) est supérieure au lancer (deux termes) $\Rightarrow$ nA(3 t) > nL (2t).

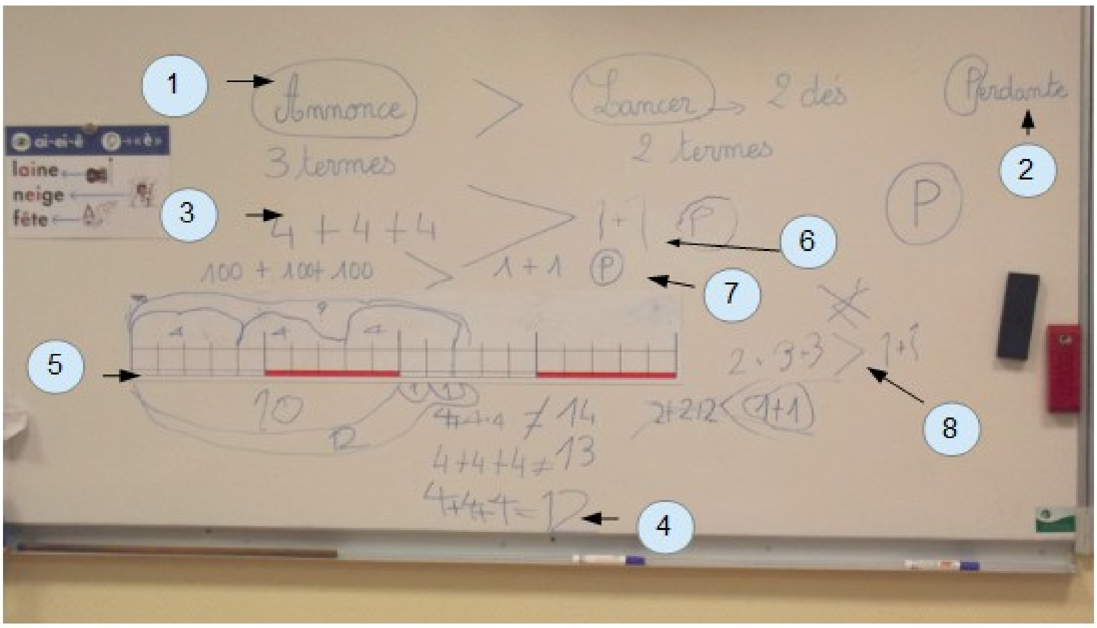
Une élève vient au tableau. Elle propose 1 + 1 pour le lancer, en riant. Toute la classe rit. Elle termine avec ces mots : « eh bien quoi, c'est vrai ». La contrainte du lancer avec deux termes est respectée. Elle produit une écriture additive vraie puisque le nombre 1 est le plus petit nombre réalisable avec un lancer de dé. La classe valide que l'annonce « 4 + 4 + 4 » est supérieure à « 1 + 1 ». Le temps de l'incitation productive et collective se referme. Il fait place à l'étude/enquête individuelle dans le *Journal du Nombre*. Le professeur distribue les cahiers et rappelle les modalités d'utilisation de celui-ci (écrire au stylo, ne pas gommer, prendre une nouvelle page ...)

3.6 Phase 6 : l'institutionnalisation et le tableau, emblème du temps didactique et de l'élaboration du savoir

Nous insérons ci-dessous une photographie du tableau de la classe, lors de cette séance du 5 décembre 2013, effectuée à la fin de l'incitation productive collective avant la distribution du Journal du Nombre à chaque élève. Celui-ci rassemble les objets de savoir. Il est un « concentré du temps didactique » écoulé/réalisé. C'est aussi la mémoire des connaissances construites dans l'action conjointe lors de l'incitation productive.

La photographie légendée montre les différents temps didactiques de l'*incitation productive*. Le temps 1 correspond au rappel des contraintes sur le nombre de termes pour l'annonce et le lancer. Le temps 2 identifie la rupture et note la caractéristique du nouveau contrat (produire des annonces perdantes). Le temps 3 est la proposition d'une annonce en trois termes par un élève. Pour le temps 4, la classe recherche le nombre de la somme représentée par l'annonce « 4 + 4 + 4 ». Le temps 5 est un temps de désaccord sur le nombre désigné par l'annonce. Le temps 6 est le temps de la preuve construite à partir de la ligne graduée (outil en usage dans la classe). Maintenant, le jeu peut être joué et le temps 7 est une recherche de proposition pour le lancer. Le dernier temps de l'incitation productive collective, le temps 8 est un temps de questionnement provoqué par l'interrogation d'un élève sur la possibilité d'écrire le signe « > » dans l'autre sens.

Séance du 5 décembre 2013, le jeu des annonces « Dés et doigts » avec l'annonce en trois termes et le lancer en deux termes



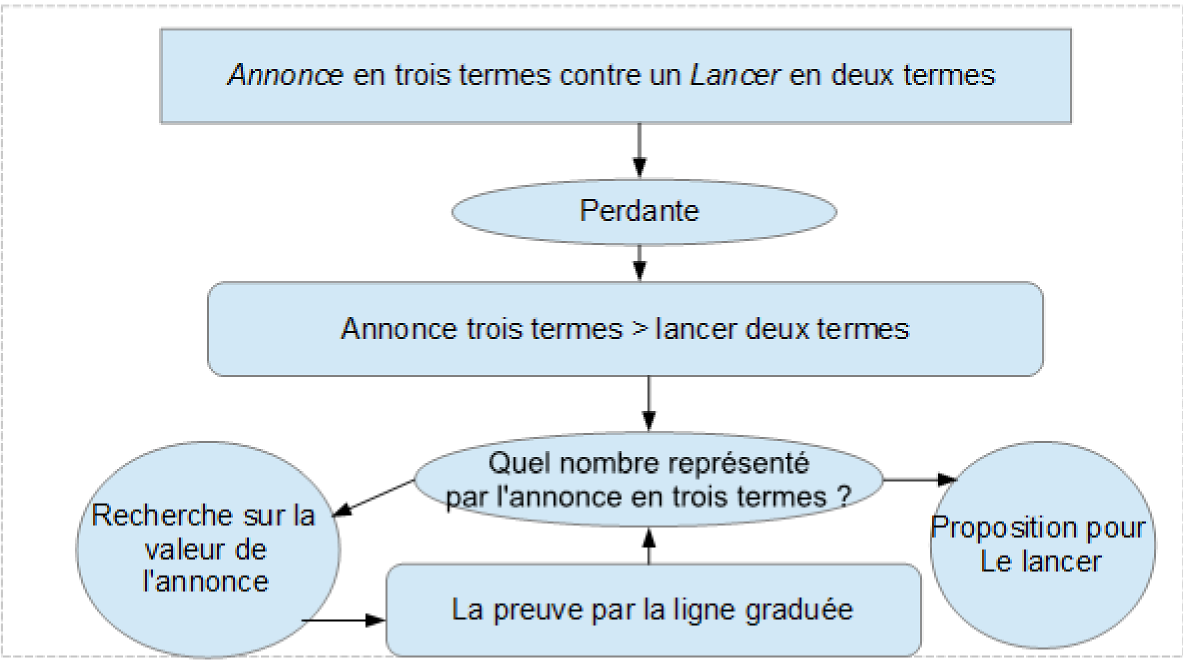
Photographie n°36 : vue d'ensemble de la notion de « supérieure à ... » (tableau de la classe)
Date, le 5 décembre 2013

Légende :

1* les contraintes de la situation ;
2* l'annonce est perdante (changement de situation) ;
3* l'annonce en trois termes proposée par un élève ;
4* le nombre représenté par les trois termes de l'annonce, (14, 13 ou 12) ;5* la preuve avec la ligne graduée ;
6* le lancer (1 + 1) ;
7* une annonce hors jeu avec le nombre 100 ;
8* la question de l'orientation et la signification du signe « > ».

Une rapide schématisation ci-dessous reprend la structure du tableau ci-dessus.[6]

Une rapide schématisation de la séance du 5 décembre 2013, l'amorçage de *l'incitation productive dans le journal du Nombre*



La construction de ce temps didactique nous apparaît très importante. Le temps semble être la condition nécessaire à la mise en œuvre de la compréhension de l'enquête mathématique. Ce temps met l'élève en capacité de pouvoir mener l'étude dans le *Journal du Nombre*. Le tableau de la classe sert alors de mémoire didactique « vivante », il retrace les temps importants en donnant à voir les les objets de savoirs. Il cristallise les connaissances. Il (re)constitue le temps de l'incitation productive. Il est l'emblème *des contraintes du contrat*. L'emblème général (la vision générale du tableau) permet à l'élève de remonter le déroulé du temps didactique (l'élaboration du savoir) par

[6] La vue synoptique large composée de trois tableaux (cf. annexes) correspond aux fichiers vidéos 414 et 415.

l'appui possible sur la mémoire cristallisée sur des objets ou des signes notés dans les espaces différents du tableau (visions parcellaires).

3.7 Phase 7 : Les premières productions dans le Journal du Nombre sous l'incitation productive collective

Pendant la production individuelle d'annonces dans le *Journal du Nombre*, trois questions vont réapparaître, pourtant abordées lors de l'incitation productive. Il s'agit des annonces hors jeu formées de nombres très grands tel que les nombres 100 ou 1000. Elles ne respectent pas la contrainte de la référence aux mains. Elles seront rejetées pour cette raison. Plus tard, la question de la présence du zéro dans le lancer surgira de nouveau. Un dernier questionnement occupera l'attention des élèves et du professeur, il s'agit de l'orientation du signe mathématique « > » et de sa signification dans l'écriture proposée. Le professeur ralentit de nouveau le temps didactique par le questionnement d'un élève qu'il renvoie au groupe pour la recherche et la construction d'une réponse commune. Les productions qui sont montrées ensuite appartiennent à cette phase.

Dans le déroulement de cette phase, un temps informel correspond à la distribution des Journaux du Nombre ou à leur apparition sur la table. On constate généralement plusieurs types de comportements d'élèves. Certains élèves écrivent dans le Journal du Nombre, très vite. D'autres élèves ont besoin de discuter avec le voisin proche le plus proche et parlent de leur idée. On constate aussi des élèves qui appellent le professeur pour entrer en discussion. En général, le professeur ne cherche pas à répondre directement aux questions de ces derniers mais il renvoie le questionnement au petit groupe d'élèves présents autour de lui. La phase 7 correspond à un de ces moments informels. Ce sont des « passages » nécessaires pour certains élèves avant de se lancer dans la production d'écritures. La phase 8, quant à elle, est davantage une phase plus « institutionnalisée ». Un élève sollicite le professeur afin d'exposer son travail. Le professeur arrête pendant quelques minutes le groupe. L'élève montre donc l'enjeu du travail avant une reprise de l'enquête.

3.8 Phase 8 : Des productions d'élèves commentées et discutées « en direct » avec la classe

La séance se continue avec l'observation du Journal du Nombre d'une élève. Elle soumet à la classe, la production de trois annonces (l'annonce élaborée collectivement lors de l'incitation productive collective mais également deux autres annonces) après avoir formuler sa demande auprès du professeur. Après un temps de recherche individuelle dans le *Journal du Nombre,* le professeur a choisi d'arrêter les élèves devant la sollicitation d'une élève. Il « ralentit », à nouveau, le temps didactique pour l'étude des productions réalisées. Cela permet de valider la compréhension des contraintes de la situation. Les productions sont choisies essentiellement parce qu'elles peuvent permettre de faire avancer l'enquête dans le milieu-problème, même si pour cela, le professeur « contient » le temps didactique. Les productions du Journal du Nombre de l'élève attirent l'attention des élèves. Le professeur cherche à approfondir l'enquête mathématique, simplement par la mise en comparaison de l'annonce et du lancer précédents avec les nouvelles productions. Qu'ont-elles de commun et/ou de différent ? Quels questionnements ouvrent-elles ? Puis, l'enquête/étude de l'élève continue dans le Journal du Nombre. Ce temps se caractérise par une sorte de « passage » à partir de la production d'écritures dans le Journal du Nombre pour les élèves qui en éprouvent encore la nécessité. Il permet de « remonter » la construction de l'avancée du savoir à partir d'une production et de prendre en charge collectivement certaines erreurs « résistantes ». Cela ne laisse aucun élève hors jeu, chaque élève peut participer à l'enquête. Il est possible bien sûr de se tromper. Les discussions ne sont pas centrées entre le professeur et l'élève mais entre le professeur et un petit groupe d'élèves, à partir d'une question souvent formulée lors d'un écrit. Certains élèves choisissent d'y prendre part momentanément puis ils repartent travaillés dans le Journal du Nombre. Si une erreur de compréhension gène massivement le déroulement de l'enquête, le professeur se réserve la possibilité d'un rappel de la classe pour un échange collectif.

3.9 Phase 9 : l'observation des productions d'un Journal du Nombre par l'ensemble de la classe

Cette fois-ci, c'est la validation qui est ancrée dans les productions personnelles d'une élève. En effet, la phase 9 se distingue de la phase 8 en cela. L'une (la phase 8) poursuit l'élaboration « d'un voir comme », d'une référence commune ou encore d'un arrière-plan tandis que l'autre (la phase 9) valide ou invalide les productions. Si les contraintes ne sont pas respectées, cela permet à l'élève de s'essayer à la réfutation et à l'argumentation. Pour l'élève moins avancé, nous dirons que ce temps est bien un *temps d'apprentissage* puisqu'il permet, non pas un autre rappel des contraintes (peut-être à l'identique) mais plutôt une seconde discussion sur la compréhension du savoir en jeu et de comment on y joue. Le professeur, par l'intermédiaire de l'élève (l'élève montrant son Journal du Nombre), n'est plus celui qui fait jouer le jeu. Pourtant, il s'agit toujours de faire jouer le jeu mais cette fois-ci, le rôle est « occupé » par un(e) élève au moyen du Journal du Nombre. Dans la séance du 5 décembre 2013, une élève avancée décide de montrer son travail. Elle sollicite le professeur. Celui-ci lui répond positivement devant les possibilités d'institutionnalisation. La réponse du professeurs anticipe sur la phase d'institutionnalisation des enjeux étudiés à partir du travail de l'élève.

3.9.1 Retour sur la rupture

L'intervention d'George

Nous sommes dans les pemières minutes de la séance du 5 décembre 2013 (entre la deuxième et troisième minute). Le professeur demande aux élèves de ranger leur ardoise qui a servi pour l'écriture littérale des nombres. Il s'apprête à définir le milieu-problème lorsqu'un élève (George) intervient et installe un déséquilibre par ses propos :

Tdp 20 (2mn), E (George) : aujourd'hui/on va perdre

Le professeur est légèrement déstabilisé. Il commence par demander le silence puis il interroge l'élève :

Tdp 21, P : chut/qu'est-ce qu'il y a...

Le professeur a une forte interrogation sur ce que représente « perdre » pour George. Quelle signification accorde l'élève à la proposition « on va perdre ». Il pense qu'il peut s'agir d'une transgression volontaire des règles du jeu. On s'amuserait à transgresser la loi, une sorte de provocation pour voir et comprendre les limites de l'école, en fait, une sorte de test. Lorsque la transgression est trop massive et importante, on est face à une impossibilité de jouer au jeu demandé. Mais est-ce réellement cela, se questionne le professeur ? L'élève peut simplement chercher à afficher/montrer encore davantage son travail dans le Journal du Nombre puisque cet élève produit souvent des annonces qui ne respectent pas toutes les contraintes et parfois ce sont des annonces hors jeu ou bien encore ne le sait-il pas lui-même. Il précise toutefois ce qu'il entend par perdre dans le Tdp suivant :

Tdp 22, E (George) : aujourd'hui on va perdre/on va faire des annonces perdantes

Les propos de l'élève nous apprennent que pour perdre au jeu des annonces, il est nécessaire de produire des annonces perdantes. Seulement, l'élève ne définit pas comment produire une annonce perdante (la nature de l'annonce). Le professeur hésite encore :

Tdp 23 (2mn43), P : ha bon/je sais pas/pourquoi/pourquoi on ferait des annonces perdantes

Le professeur tente de gagner du temps comme nous le voyons dans le Tdp 23. Il « ralentit » le temps didactique afin de pouvoir cerner davantage la proposition de l'élève. Comment l'élève imagine-t-il ou conçoit-il la situation qu'il propose? Quels sont les intérêts de cette proposition au regard de l'enseignement/apprentissage sur l'égalité/inégalité. Enfin, la proposition de l'élève (George) peut-elle cohabiter avec le projet initial du professeur ?

Tdp 24, E (George) : ben parce que/

Ici, le professeur n'en apprendra pas plus (Tdp 24). L'élève répond mais les propos n'oriente en rien le professeur qui continue d'hésiter. L'élève veut jouer à perdre mais il ne sait peut-être pas trop comment, même la proposition de produire des annonces perdantes n'aide en rien. L'élève peut rencontrer quelques difficultés à exprimer sa pensée, à la formaliser pour la rendre accessible à autrui. C'est la classe qui répond :

Tdp 25, Es : on a fait des annonces gagnantes hier

C'est une justification/acceptation de la proposition d'George. Puisqu'hier, la classe a joué à produire des annonces gagnantes, aujourd'hui, elle peut changer et produire des annonces perdantes. Le professeur cherche encore à gagner du temps et répond :

Tdp 26, P : .../bon/j'avais pensé à autre chose/mais/on fera peut-être/on va voir comment on va travailler...

La classe est prête à perdre et à écrire des annonces perdantes, oui mais, comment se demande le professeur. Comment définir une annonce perdante « générique » sans appui sur une production précédemment écrite dans le Journal du Nombre ? Que va choisir le professeur : la proposition d'George ou son projet d'origine ?

Le professeur choisit de modifier son projet

Le professeur termine conjointement la mise en place dans laquelle l'étude/enquête va se dérouler comme nous le constatons :

Tdp 46 (4mn15), P : deux termes puisqu'il y a deux dés/et/George nous propose aujourd'hui d'écrire/des annonces

Le professeur semble avoir tranché en faveur de la proposition de l'élève. Il reste très prudent et avance pas à pas. Il cherche à laisser pour l'élève George (l'auteur de « jouer à perdre ») un espace de dialogue pour préciser sa proposition et orienter l'ensemble du groupe-classe dans ce milieu-problème. Le professeur n'a pas terminé pas sa phrase. C'est une élève avancée qui s'en charge :

Tdp 47, E (Isabelle) : perdantes

Le professeur comprend que si les élèves avancés (comme Isabelle) peuvent identifier précisément ce qu'est une annonce perdante, cela pourrait ne pas être aussi simple pour les élèves moins avancés ou hors jeu. La stratégie du professeur va consister à mettre en œuvre la comparaison. Il convoque la situation précédente comme référence dans laquelle l'annonce est gagnante mais faisant cela il « appelle » aussi un autre milieu-problème. Il s'agit de l'extrait que nous allons analyser maintenant qui comprend les Tdp 48 à 60. Le professeur confirme maintenant la rupture :

Tpd 48 (4mn29), P : annonces perdantes/P/perdantes/alors/je vais modifier la règle du jeu/les annonces/elles vont/jusqu'à maintenant/on écrivait des annonces qui étaient comment par rapport *au lancer*

Il annonce que la règle du règle est modifiée. Puis, il cherche à orienter le regard des élèves sur la particularité des annonces dans la situation précédente. Un élève répond :

Tdp 49 (4mn40), E (Joseph) : gagnantes

Le professeur accepte cette réponse mais elle ne lui convient que partiellement. Il cherche donc à faire préciser ce qu'est une annonce gagnante avant de définir conjointement une annonce perdante.

Tdp 50, P : oui mais/pour qu'elles soient gagantes/il fallait qu'elles soient comment/

Le professeur fait l'hypothèse que la compréhension d'une annonce gagnante pourrait aider à déterminer conjointement ce qu'est une annonce perdante. Il fait preuve, à la fois, de réticence et d'expression puisqu'il ne fournit pas d'informations mais continue de questionner comme nous le montrons dans les cinq Tdp suivants :

Tdp 51, E (Anne) : pareilles

Tdp 52, Es : pareilles

Tdp 53 (4mn53), E : égales

Tdp 54, P : oui/pareilles/ça veut dire quoi/

Tdp 55, Es : égales

Il est temps de passer à la comparaison puisque la rupture a été annoncé. Il est nécessaire de la déterminer. Les quatre Tdp tentent de cerner la différence entre une annonce gagnante et une annonce perdante :

Tdp 56, P : ça veut dire égales/cette fois-ci/l'annonce ne va pas être égales au lancer/

Ici, se noue certainement l'ambiguïté du codage de l'inégalité, l'enjeu des annonces perdantes. La classe joue à perdre en produisant des annonces perdantes codées avec le signe « = » mais dont la validité/vérité se comprend et se lit avec la lettre P (annonce perdante) notée en fin d'écriture. La même élève avancée (Isabelle) précise le pourquoi d'une annonce perdante :

Tdp 57, E (Isabelle) : pas égale

Le professeur cherche à faire diffuser la compréhension d'une annonce perdante d'une élève avancée vers un(e) élève moins avancé(e), voire à l'ensemble de la classe. Il confirme par l'expression « elle va bien sûr ». Il parle toujours ce professeur mais la nature de son expression ne définit pas précisément ce qu'est une annonce perdante, ceci afin que les élèves « entrent » dans le milieu-problème et même s'emparent de la question.

Tdp 58, P : alors/elle va bien sûr/ne pas être égale au lancer/mais elle va être plus que ça/elle va pas être égale au lancer/je suis d'accord

En fait, le professeur renvoie la recherche dans le territoire de l'élève. C'est un peu comme s'il formulait les choses ainsi : « allez, maintenant, c'est à vous de définir comment vous déterminer les caractéristiques de l'annonce perdante dans cette situation-problème. Un élève s'empare effectivement de la question.

Tdp 59, E (André) : plus petite que ou plus grande

La notion de l'inégalité est enfin formulée. Une annonce perdante sera une annonce qui n'est pas égale au lancer parce qu'elle est plus petite ou plus grande que le lancer. Le professeur va faire un choix pour la mise en place de l'écriture d'annonces perdantes dans le Journal du Nombre. Il décide que l'annonce perdante sera plus grande que le lancer. Maintenant, nous observons les productions réalisées dans le Journal du Nombre lors de cette séance.

4. LE TRAVAIL DE L'INCITATION, LES PREMIÈRES PRODUCTIONS D'ÉLÈVES DANS LE JOURNAL DU NOMBRE

4.1 Le recueil d'incides

Afin de donner au lecteur une idée générale de la manière dont les élèves travaillent grâce à l' incitation productive, nous montrons tout d'abord quelques productions d'élèves du *Journal du Nombre.* Ensuite, nous analyserons les transcriptions, avant l'étude de certains épisodes signifiants issus de la séance.Nous présentons, maintenant, huit travaux d'élèves réalisés lors de la séance du 5 décembre 2013 dans le Journal du Nombre. Nous commençons par trois productions perdantes au jeu didactique suivies de cinq productions gagnantes au même jeu didactique.

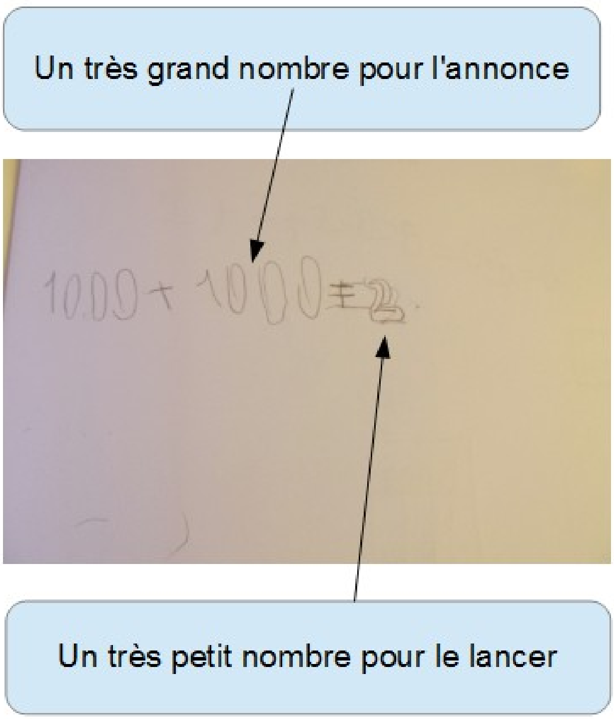
4.2 Trois productions perdantes au jeu didactique

Nous commençons donc par trois productions qui pourraient nous permettre de comprendre le type de difficultés rencontrées par les élèves dans l'élaboration du savoir lors de la mise en œuvre de l'incitation productive dans le Journal du Nombre. Les productions d'élèves suivantes semblent en effet montrer une compréhension différente du savoir étudié.

La photographie n°3 illustre le non respect de la contrainte. Elle est, de ce fait, une annonce *hors jeu* puisque les nombres choisis sont beaucoup trop grands (l'élève a « perdu » la référence aux doigts).

Essai 1

Une annonce plus grande, oui, mais ne respectant pas les contraintes



- L'annonce ne respecte pas les contraintes suivantes : l'annonce est en 3 termes et le lancer 2 termes
- L'élève joue à « l'annonce est la plus grande que le lancer » et il pense gagner parce qu'elle est beaucoup plus grande.
- Le signe mathématique « > » est absent. L'élève a substitué à la place le signe « ≠ ».
- Le choix d'un nombre très petit pour le lancer afin d'assurer le gain sans contestation possible. C'est un hors jeu.

Photographie n°37 : une annonce hors jeu

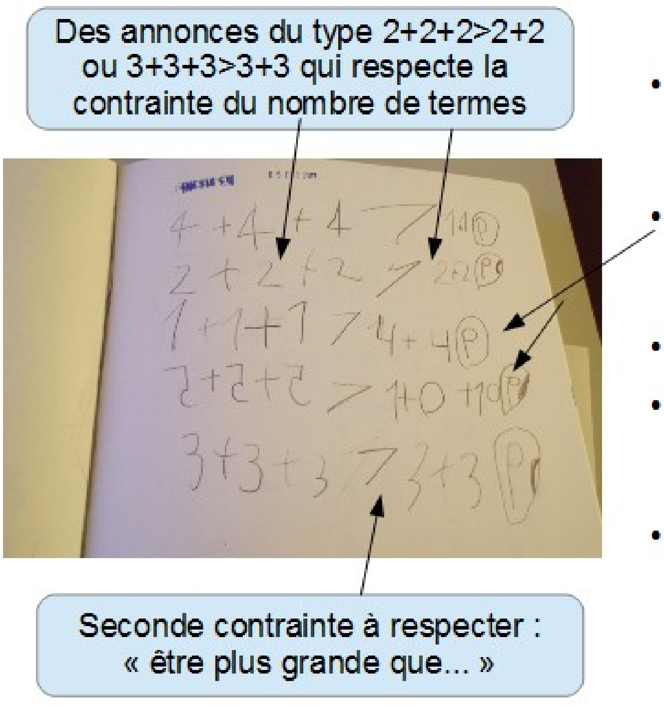
Date, le 5 décembre 2013

L'élève pense assurer le gain par le choix de nombres très grands (1000) pour l'annonce et très petit pour le lancer (un nombre unique). La contrainte d'écrire avec trois termes et deux termes n'est pas respectée. L'élève, par la présence du signe « ≠ », indique que les nombres ne sont « pas pareils », peut-être signifie-t-il aussi la valeur très différente des nombres. Il pourrait vouloir noter et/ou accentuer la différence/l'écart entre un très grand nombre et un très petit nombre. L'élève joue un jeu qui n'est pas le jeu demandé. Il ressemble au jeu demandé par le professeur puisque l'annonce est supérieure au lancer, pourtant il s'agit bien d'une écriture *hors jeu*.

Essai 2

La photographie n°4 représente une production d'élève radicalement différente. Elle montre une autre stratégie dans la compréhension du jeu. Le problème est difficile. Pour jouer au jeu demandé, l'élève écrit des annonces. Pour chaque écriture, les nombres sont parfois les mêmes pour l'annonce et le lancer. Ensuite, l'élève respecte la contrainte du nombre de termes en ajoutant un terme de plus dans l'annonce (ou un terme de moins dans le lancer). La contrainte de produire une annonce supérieure au lancer se trouve plus facilement respectée. Puis, l'élève tente de changer de stratégie avec une sélection de nombres différents pour le lancer et l'annonce. Cela provoque certaines erreurs. Toutefois, l'élève joue au jeu demandé, même si nous notons quelques erreurs.

De la variété pour l'annonce et le lancer



- Le nombre choisi pour une annonce est répété 3 fois, même procédé pour les cinq annonces.
- Le lancer augmente mais il y a des erreurs comme dans la troisième et quatrième proposition.
- Les erreurs concernent le lancer.
- 1+1+1>4+4 revient à 3>8, ici, peut-être que l'élève a considéré le nombre de termes en jeu en oubliant les nombres.
- 5+5+5>1+0+10, ici, le lancer ne respecte plus la contrainte des 2 termes. De plus, il contient un dix (impossible à réaliser à l'aide d'un dé)

Photographie n°38 : des annonces constituées de 3 fois le même nombre
Date, le 5 décembre 2013

La production ci-dessus montre ainsi des annonces en trois termes dont l'écriture est construite à partir d'un même modèle selon le type 5 + 5 + 5 ou 3 + 3 + 3. Le lancer s'analyse en deux types de productions. Dans le premier cas, l'élève réduit le nombre de termes à deux pour l'écriture du lancer comme l'exige la contrainte. Il compare donc 3 + 3 + 3 à 3 + 3. La suppression d'un terme identique

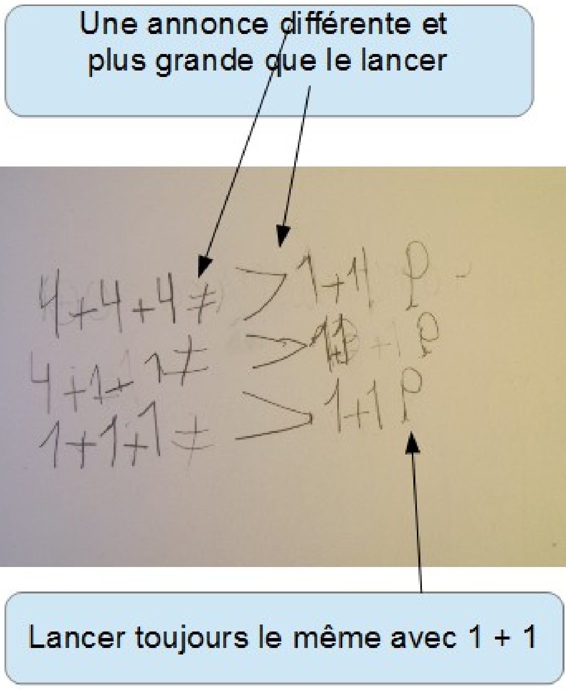
dans le lancer rend l'annonce forcément supérieure puisque plus grande parce que dotée d'un terme de plus. L'élève n'a pas nécessité de calculer. Cela est intéressant même si cela signifie une erreur pour l'élève puisque ce dernier ne calcule visiblement pas la somme. Il active donc une connaissance fondamentalement précieuse, par exemple, $2 + 2 + 2 > 2 + 2$ qui correspond à une reconnaissance systémique d'une écriture (la reconnaissance « immédiate »). Même si le fait de « ne pas calculer des sommes pour comparer » amène l'élève à des erreurs, la connaissance en voie de constitution est mathématiquement très élaborée. Il semble que nous sommes dans le cas typique où la production d'erreur constitue l'indice d'une connaissance mathématique de haut niveau en constitution.
Dans le second cas, nous étudions une annonce et un lancer composés de nombres différents comme avec l'écriture $1 + 1 + 1 > 4 + 4$. Que nous apprend l'écriture ? L'élève a gardé le même nombre pour l'annonce (le nombre 1 est répété trois fois comme le veut la contrainte). Pour le lancer, l'élève fait le choix d'un autre nombre qu'il répète. Le nombre 4 est noté deux fois (respect de la contrainte liée au lancer). Il n'a pas choisi le même nombre pour l'écriture de l'annonce et du lancer comme lors des écritures précédentes (le nombre 1 n'est pas le nombre 4). Cela provoque une écriture erronée. Nous observons une annonce plus petite que le lancer. Elle n'appartient pas au contrat en cours. Elle n'est pas valide.

Une seconde annonce $5 + 5 + 5$ comparée au lancer suivant $1 + 0 + 10$ retient notre attention. Elle est notée perdante. Il est vrai que 15 (la somme de l'annonce) est plus grand que 11 (la somme du lancer). Le lancer représenté par le nombre 11 (la somme) tient compte du champ numérique possible réalisable avec deux dés (jusqu'à 12 inclus). Pourtant l'annonce est doublement invalide. Premièrement, le lancer ne respecte pas la contrainte des deux termes (pour le lancer). Ensuite, la proposition du lancer ne peut s'écrire avec le nombre 10 ni avec le nombre « 0 ». Le dé est un dé à six faces (les constellations représentent les nombres de 1 à 6).

Essai 3

La photographie n°5 affiche des annonces différentes pour un lancer toujours identique et cela, pour les trois productions présentes dans le Journal du Nombre. Le lancer est toujours le même, c'est-à-dire, $1 + 1$.

Des annonces perdantes



- P c'est perdant
- L'élève écrit d'abord que l'annonce est différente du lancer. Ensuite, il précise que l'annonce est plus grande. C'est ce que semblent dire les deux signes mathématiques côte à côte.
- Respect de la contrainte, annonce en 3 termes et lancer en 2 termes.
- Le lancer reste identique pour les trois annonces (1 + 1). L'élève fixe son attention sur l'écriture de l'annonce en trois termes.
- Les annonces sont toutes formées à partir des nombres 4 et 1.

Photographie n°39 :deux signes mathématiques pour dire et écrire la différence
Date, le 5 décembre 2013

Le travail de cet élève montre une tentative de rester dans un champ numérique compris en dessous du groupement de cinq (la main), avec le respect des possibilités du dé (1≤ nL [7]≤ 6 puisque l'élève a « minoré » le lancer correctement avec 1 + 1, et non avec 0 + 0). L'élève choisit donc un nombre suffisamment grand. Toutefois, ce nombre n'est pas trop grand puisque pour gagner, il suffit que « l'annonce soit plus grande que le lancer ».
Concernant le choix du lancer, l'élève opte pour une écriture toujours identique quelque soit l'annonce. De plus, le lancer est le plus petit lancer possible réalisable avec deux dés. Il se code avec deux 1. Cela permet à l'élève de proposer des annonces assurément plus grandes que le plus petit lancer (écrit sous la forme 1 + 1). Les efforts de l'élève peuvent se centrer sur l'écriture des annonces en trois termes.
Il se pourrait aussi que l'élève cherche à *ne pas prendre de risque* afin de rester dans le jeu demandé. La zone des propositions de l'élève pour les écritures de l'annonce et du lancer est très proche de la proposition écrite au tableau lors de l'incitation productive. Il semble que l'élève identifie le jeu à jouer mais *pas encore* comment y jouer. Il pourrait alors rester « accroché » à l'incitation productive.

4.3 Deux productions gagnantes au jeu didactique

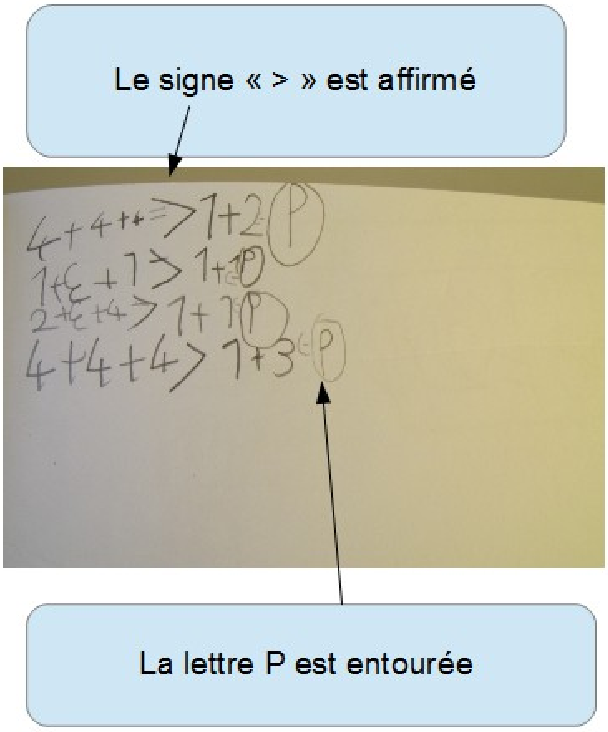
Observons maintenant une production avec toutes les contraintes de la situation définie lors de

[7] Comme nous l'avons vu, nL signifie le nombre du lancer

l'incitation productive, pendant cette séance du 5 décembre 2013.

Essai 1

Quatre annonces perdantes



- Des annonces avec les nombres 1, 2, 3 et 4.
- La première annonce et la dernière sont la même mais elles sont comparées à un lancer différent, plus 1 pour le dernier lancer (1 + 2 et 1 + 3).
- Le lancer varie peu. Il s'écrit 1+1, ou 1+2 ou encore 1+3. Il reste très petit afin d'assurer le gain en respectant la contrainte « *l'annonce plus grande que le lancer* ».
- Trois annonces sur quatre contiennent le nombre 4. Il semble que le nombre 4 assure le gain sur le lancer.

Photographie n°40 : le signe « > »
Date, le 5 décembre 2013

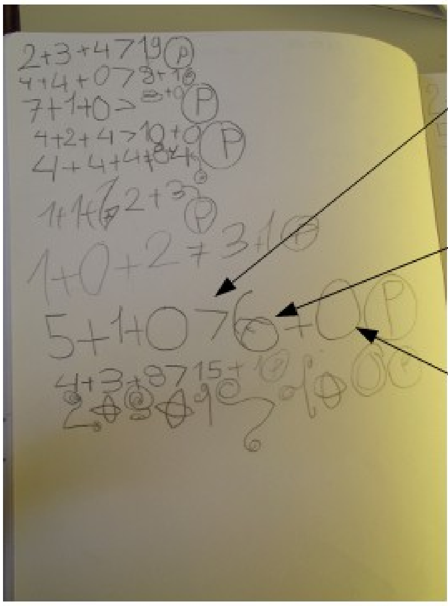
La production montre un élève centrant les efforts sur la composition de l'annonce. La stratégie sélectionnée semble être la modification légère du lancer, à chaque nouvelle annonce. En effet, le lancer varie peu. Il reste très petit. La somme du lancer ne dépasse pas le nombre 4. Pourtant, le jeu se déroule avec deux dés de 6. Le choix d'un petit lancer (la somme des deux dés) semble permettre le respect de la contrainte, c'est-à-dire une annonce plus grande que le lancer et donc le gain pour l'élève et le professeur (la réussite de produire/écrire des annonces perdantes).
Pour l'écriture de l'annonce, l'élève propose des « compositions » plus variées, contrairement au lancer, comme nous l'avons précisé. Les nombres choisis sont inférieurs à 5. L'élève respecte la référence aux mains. L'écriture des annonces se compose du nombre 4. Nous remarquons que le nombre 4 est très majoritairement présent dans les quatre annonces puisqu'il est écrit sept fois en tout.

Essai 2

Nous pensons que le respect du nombre de termes (trois termes pour l'annonce et deux termes pour le lancer) pourrait amener l'élève à questionner *de nouveau la notion d'égalité.* Il semble que la production suivante nous y entraine.
Pour cela, nous faisons l'hypothèse que l'élève peut tenter de produire un groupement de deux termes choisis dans l'annonce afin de réduire l'écriture. « L'écriture réduite » deviendrait le lancer et respecterait la contrainte de deux termes. Ensuite, il resterait l'étude du rapport entre l'annonce et le

lancer avec les rencontres de différentes notions telles que supérieure, inférieure ou égale.

Une annonce particulière 5 + 1 + 0 > 6 + 0 P



- La contrainte de l'annonce en 3 termes et du lancer en 2 termes est respectée mais ... l'annonce est perdante si et seulement si elle est plus grande, ici, il s'agit du même nombre, c'est 6.
- L'élève a respecté la référence aux mains et aux dés. Elle a écrit pour l'annonce 5 + 1 + 0 (les nombres ne peuvent être supérieurs à cinq/groupement de la main). Ensuite, peut-être que la contrainte du lancer en 2 termes provoque le groupement des nombres 5 et 1 pour obtenir 6 et/ou la référence au dé (le nombre 6 est bien sûr possible dans le lancer avec le dé mais *le 0 est impossible*)
- L'annonce est validée par l'élève perdante. Il semble qu'elle ait reproduit le groupement des deux premiers termes de l'annonce pour l'écriture du lancer dans plusieurs propositions.

Photographie n°41 : l'égalité de 3 termes contre 2 termes
Date, le 5 décembre 2013

Le respect de la règle de 3 termes contre 2 termes pourrait contraindre l'élève à produire l'erreur de proposer une annonce, non plus supérieure mais égale au lancer. Dans le travail ci-dessus, nous pensons que l'élève cherche à respecter la contrainte de 3 termes pour l'annonce et 2 termes pour le lancer. Pour cela, il utilise le groupement qui permet de réduire l'écriture de trois termes à une écriture en deux termes (par le groupement des nombres 5 et 1). L'élève trace 6 dans le lancer, nombre obtenu par le groupement de deux nombres de l'annonce.
Dans chaque écriture additive, on note la présence du zéro. Le nombre zéro est le troisième terme présent dans l'annonce. L'élève garde ce terme (le zéro) dans le lancer pour respecter la contrainte de deux nombres. L'annonce est alors *égale* au lancer. L'écriture de l'annonce peut contenir le nombre zéro, puisqu'il est possible de le représenter par une main fermée. Au contraire, l'écriture du lancer ne peut comprendre de zéro. Il n'existe pas de zéro sur le dé (il n'y a pas de collection qui note le vide sur un dé classique). Dans les productions de l'élève, la notion d'égalité semble créer beaucoup d'interférences.

Le début de la séance nous a permis de centrer notre attention sur *l'action conjointe* dans le temps de l'incitation productive pour apporter au lecteur une vision générale de celle-ci. Puisque le savoir visé est complexe, il y a nécessité d'une mise en enquête par *l'incitation productive*. L'enquête, selon nous, pourrait permettre à tous les élèves, non pas de produire des annonces dans le respect des contraintes, mais de commencer à jouer au jeu demandé. Pour cela, l'enquête débutera collectivement par l'étude conjointe dans ce dispositif nommé « l'*incitation productive collective* » que nous développons ci-dessous. Nous cherchons à caractériser la nature de l'incitation productive collective.

5. LA NATURE DE L'INCITATION PRODUCTIVE COLLECTIVE, ANALYSE SPÉCIFIQUE

Nous décrivons ce que nous désignons par « l'incitation productive collective » liée à la production d'écritures mathématiques dans le *Journal du Nombre*. Nous l'avons vu, il s'agit d'un temps d'étude collectif qui précède la recherche individuelle, dont l'enjeu est une enquête mathématique dans le *Journal du Nombre*. Quelle pourrait être la nature de ce temps didactique, consacré à l'incitation productive collective qui consiste à favoriser, dans un second temps, le travail dans le *Journal du Nombre ?* Lorsque l'élève travaille dans le Journal du Nombre, il répond à l'incitation du professeur et poursuit l'enquête mathématique amorcée collectivement lors de l'incitation productive. L'incitation est une incitation du professeur vers l'élève composée de temps différents, collectif et individuel.

En fait, il s'agit de doter tous les élèves de capacités à produire des écrits mathématiques en rapport avec le savoir visé, cerné conjointement pendant le temps de l'incitation productive collective. Ce temps permettrait de développer chez les élèves différentes capacités en relation avec le savoir mathématique comme l'interrogation, la discussion, l'argumentation et la réfutation. Pour cela, le professeur cherche à faire émerger des questions autour des connaissances en jeu. Le professeur pense que le questionnement collectif pourrait aider à l'éclosion du savoir recherché. Lors de la genèse de l'apprentissage, le professeur tente également de rendre publiques les erreurs privées de l'élève par la mise en débat. L'enjeu est capital. Les erreurs sont à étudier attentivement pour ne pas devenir des obstacles à la compréhension. Le professeur fait l'hypothèse que la classe pourrait élaborer un rapport spécifique à l'objet mathématique (le savoir étudié) par la prise en charge collective de l'erreur individuelle et/ou semi-collective (l'erreur personnelle ou bien erreur classique d'apprentissage caractérisée du savoir étudié). Ce rapport ne viserait pas une simple imitation mais bien l'élaboration complexe du savoir par la compréhension et la maîtrise des algorithmes associés.

5.1 En quoi est-elle productive ?

L'élève n'est pas confronté à un exercice formel. Expliquons-nous. L'élève n'est pas mis face à un exercice ou une consigne dont l'enjeu est l'apprentissage par l'écoute et l'imitation/application. Dans le modèle d'apprentissage classique, le rôle du professeur consiste à rendre explicite le fonctionnement de la règle à partir des exemples choisis et commentés. La loi semble être représentée par l'exemple mais aussi, pourrions-nous dire, entièrement « contenue » dans l'exemple. Elle est à appliquer, sous l'impulsion du professeur, pour l'étude du savoir, dont le but poursuivi est l'apprentissage/enseignement. En sorte, la règle semble être « strictement apportée et imposée » par le professeur. L'action de « montrer publiquement » engage la responsabilité du professeur. Le professeur montre par la sélection l'exemple représentant la règle, les choix réalisés lors du travail de préparation hors de la classe. Cette action de monstration de la règle par l'exemple explicité ou appliqué semble être considérée comme le déclencheur de l'apprentissage. Le « bon exemple » de la « bonne règle » serait le garant de l'apprentissage. Elle assurerait la compréhension. La règle montrée (le déclencheur) serait supposée également activer ou réactiver des connaissances nécessaires à la résolution du problème en cours. Finalement, la « règle » permettrait l'enseignement par la sélection du « condensé » de savoir sélectionné, donné à voir et à appliquer à travers l'exemple. L'habileté du professeur consisterait à montrer en quoi l'application de la règle est un raccourci que l'élève doit *impérativement* apprendre à maîtriser pour comprendre la nécessité de l'enjeu du savoir exposé.

Considérons maintenant, en contraste, *l'incitation productive collective*. Elle ne fonctionne pas comme le modèle classique d'apprentissage. Pour cela, nous allons identifier différents temps dans la mise en œuvre de l'incitation productive collective.

Au début, il s'agit, entre les élèves et le professeur, de cerner conjointement le *jeu d'apprentissage*. C'est un temps pour la définition de l'ensemble des contraintes et/ou le rappel de la situation précédemment jouée. Ce temps pourrait, semble-t-il, garantir la réception de la compréhension des contraintes de la situation par tous les élèves. Il s'agit de fait d'une « étude du contrat didactique *en cours* » réalisée collectivement pour éviter que certains élèves ne se retrouvent dans une position de hors jeu. L'incitation productive collective montrerait publiquement la construction de l'arrière-plan de l'apprentissage par les échanges conjoints. Pour le dire autrement, l'incitation productive collective définit le paysage didactique dans lequel l'apprentissage va prendre place. Tout simplement, le professeur prend en charge les conditions nécessaires pour « *faire jouer le jeu* ». Nous pourrions dire que, pour pouvoir, à la fois, montrer l'arrière-plan et le définir, le professeur doit le construire conjointement avec les élèves sous la modalité spécifique *de l'incitation productive collective.* Il y a nécessité de construire le paysage dans lequel l'enquête va se dérouler. La métaphore du paysage nous permet de préciser que le paysage didactique (l'arrière-plan) n'est pas un paysage que l'élève se contente de regarder, mais dans lequel il se déplace, dans et avec lequel il agit et ressent. Le professeur ne peut imposer ce paysage didactique, au risque de « perdre » l'élève qui n'aurait pas construit de points de repères, des références. L'habileté du professeur consiste, ici, à rendre l'élève « co-constructeur » du paysage dans lequel l'étude/enquête va s'effectuer. Nous faisons l'hypothèse que l'élève peut identifier ou cerner davantage le but à atteindre et les moyens possibles à utiliser, par et avec l'incitation productive collective, *à la stricte condition* que le professeur ne dévoile pas la stratégie pour gagner. L'élève ne sait donc pas comment gagner. C'est là, tout l'enjeu de la recherche dans le *Journal du Nombre*. L'apprentissage est et reste à la charge de l'élève.

L'élève doit donc enquêter, mais à partir d'un paysage commun dans et avec lequel, nous l'avons précisé, l'élève agit et ressent, dans un « contrat commun ». Le second avantage consisterait à fournir un espace dans lequel lier les connaissances personnelles de l'élève aux connaissances de l'École.

L'enjeu, pour notre exemple, est de produire une annonce en trois termes avec un lancer en deux termes. L'incitation productive collective porte à la discussion la question des contraintes, pour en assurer, à la fois, la compréhension et la référence. En fait, l'idée est de bien faire appréhender aux élèves le contrat en jeu, de manière qu'ensuite l'inégalité trois termes de l'annonce supérieurs aux deux termes du lancer puisse constituer un milieu-problème dans lequel la classe enquête. Ici, donc, le travail dans le contrat permet de le rendre réellement adjuvant du milieu. Ce n'est pas un temps de « formatage » dont le but consisterait à fabriquer de futures réponses *conformes aux attentes du professeur*. C'est un temps nécessaire à la compréhension des contraintes de la situation par tous les élèves dont l'enjeu est la production d'écritures mathématiques. Le professeur accepte toutes les écritures. Celles-ci peuvent être bien entendues erronées. L'étude des écritures (les erreurs et les autres propositions) peut constituer les objets de l'enquête et/ou l'approfondissement de celle-ci. Pour cela, elles devront être prises en charge collectivement par la mise en débat, c'est-à-dire l'étude collective de la recherche de la validité des critères au moyen de la discussion. Nous pensons que ce sont les échanges *par l'étude conjointe et approfondie du savoir qui élaborent l'apprentissage.*

Le rôle de l'enquête consiste à favoriser les apprentissages. Sans l'enquête collective puis individuelle, l'élève n'apprendrait pas, nous semble-t-il. Ce sont les questionnements sur le savoir en construction mais aussi l'accès et le retour dans les savoirs anciens qui participent à l'élaboration des connaissances. L'enquête suppose des éléments « récents » dans le contrat, et des éléments « anciens » dans le contrat, qu'il faut réactiver, remobiliser, voire repenser comme ici, par exemple avec l'égalité. Le professeur ne cherche nullement à supprimer les erreurs, nous l'avons déjà précisé puisque les erreurs font parties des processus d'apprentissage. L'incitation productive collective cherche à placer l'élève comme « un élève en capacité de jouer au jeu demandé ». Le professeur cherche à faire jouer le jeu même difficilement, mais l'enjeu est la participation de tous les élèves. L'incitation productive collective institue l'élève en tant qu'« élève » par la co-construction des moyens et des connaissances dont celui-ci doit disposer et qu'il doit identifier pour jouer au jeu demandé. Une nouvelle fois, répétons-le, le professeur ne va pas dire et montrer « le comment » utiliser les connaissances à acquérir. La stratégie du professeur consiste à créer, conjointement, les conditions nécessaires au jeu de tous les élèves, *à faire jouer le jeu*. Ceci ne signifie pas que tous les élèves joueront savamment ou adéquatement au jeu demandé mais il se pourrait que ce soit les transactions sur l'élaboration du « savoir » qui construisent par une étude approfondie dans le contrat/milieu adéquat l'enseignement/apprentissage. L'objet transactionnel des échanges reste le savoir. Pour cela, le professeur choisit de faire entrer le savoir dans la classe, à partir des propositions formulées et reprises par les élèves à partir de connaissances anciennes. Celles-ci sont le moyen d'orienter le questionnement de la classe par des aller-retours dans le savoir mathématique étudié (ancien et aussi futur). C'est par l'étude des contraintes de la situation favorisant l'enquête et l'approfondissement du milieu que l'apprentissage se construit dans un contrat/milieu adéquat. La responsabilité fondamentale du professeur consiste à faire en sorte que chaque élève soit mis en capacité de jouer le jeu didactique. Cela ne signifie pas que chaque élève réussisse de la même manière que tous les autres.

5.2 En quoi, est-elle collective ?

Le professeur construit conjointement l'arrière-plan dans laquelle l'étude/enquête va se dérouler, nommé aussi « paysage didactique ». Il s'agit au début d'un arrière-plan générique. L'arrière-plan est générique puisqu'il dessine les grandes lignes du contrat/milieu dans lequel l'élève va pouvoir mener son enquête, mais le rapport spécifique à l'arrière-plan constitué des objets de savoir à étudier n'est pas encore construit. L'arrière-plan générique deviendra un arrière-plan spécifique par la mise en débat de la classe sur les questions mathématiques à partir des objets. Ce sont les échanges spécifiques sur le savoir en construction qui rendent obsolète l'ancien contrat et actualisent le nouveau contrat/milieu. La construction du contrat est orientée vers l'enquête dans le milieu et c'est en cela que le contrat dépend du milieu à enquêter. L'arrière-plan est « contractuel », il contient le contrat. Le milieu ne fait pas partie de l'arrière-plan puisqu'il est toujours problématique. Lorsque l'énigme sera résolue et complètement transparente pour l'élève alors le milieu sera agrégé au contrat et assimilé. C'est la fonction de l'incitation productive collective de rendre le contrat/milieu *pourvoyeur de sens et de significations par la construction d'un arrière-plan spécifique*. L'arrière-plan sera devenu spécifique lorsque l'élève saura à quel jeu le professeur lui demande de jouer. Bien entendu, cela ne signifie pas que l'élève est sûr de gagner, ou que tous les élèves pourront gagner de la même façon.

Le professeur énonce la contrainte liée à l'écriture de l'annonce (l'écriture de l'annonce est en trois termes). C'est un premier amorçage dans la structuration/définition du savoir. Par l'amorçage, l'élève est « replongé » dans la situation précédente mais surtout dans la mémoire didactique de la classe, dans les connaissances anciennes. C'est un retour dans le « comment écrire les annonces de la situation précédente (avec quelles contraintes) ». Le savoir supposé acquis est convoqué et de nouveau interrogé pour, cette fois-ci, questionner, à partir de l'ancien savoir, le nouveau savoir. Il s'agit d'un saut dans la mémoire des situations didactiques de la classe. Nous pourrions dire que le temps de la classe est un temps des situations. Ce rappel de la situation construit/indique la référence à sélectionner mais ce n'est pas un « catalogue des situations ». Il s'agit de la référence nécessaire à la construction conjointe de l'arrière-plan spécifique du nouveau contrat/milieu adéquat dans lequel l'élève va enquêter collectivement puis individuellement dans le *Journal du Nombre*. Le temps des situations permet le temps de l'élaboration des connaissances.

C'est à partir des expériences réalisées dans la classe, dont l'histoire est gardée en mémoire et éventuellement réactivée par les traces, que la référence se construit pour l'élève. Cette référence est essentielle pour les nouveaux apprentissages. Un apprentissage s'intègre dans un réseau de connaissances. Il prend place dans un ensemble de savoirs à des états différents, emmêlés de connaissances anciennes et à venir. La construction conjointe du contrat/milieu permet à l'élève une identification du « avec quoi » le professeur lui demande de jouer. C'est vraiment la question du contrat qui oriente l'enquête des élèves. L'élève doit comprendre comment jouer le contrat pour ensuite jouer, enquêter dans le milieu-problème ainsi constitué. Nous précisons à nouveau que l'élève ne connait toujours pas *le pourquoi du jeu*. Le contrat/milieu permet également une certaine connaissance du « comment on y joue » sinon le jeu serait impossible. Mais l'élève doit apprendre, avec le pourquoi du jeu, comment on y joue *au mieux*. Le but n'est pas de gagner une fois mais d'apprendre à gagner à tous les coups. Ici, le professeur doit *impérativement* se taire sous peine de faire perdre tout le monde, Professeur et Élève, puisque l'élève n'apprendrait pas. Le professeur se tait, et à dans le même temps, il dit beaucoup de choses. C'est la dialectique de la réticence et de l'expression développée dans un prochain paragraphe.

Nous faisons l'hypothèse que l'incitation productive collective permet à l'élève de mieux comprendre ce dont le professeur parle sans que celui-ci ne lui dévoiler l'enjeu de l'apprentissage. L'incitation productive collective permet à l'élève de mieux comprendre la demande du professeur par le travail dans le milieu-problème. Ce serait l'existence des expériences vécues et mémorisées sous la forme de traces, contenues dans la référence montrée/formulée/enregistrée sur laquelle l'élève peut prendre appui pour le nouvel apprentissage, qui serait une aide au « décodage » des signes du professeur. L'expérience est un appui sur lequel l'élève doit pouvoir s'appuyer pour approfondir et consolider le savoir. En fait, le professeur pointe du doigt l'objet, celui sur et/ou dans lequel l'enquête mathématique va se dérouler mais l'objet/milieu n'est pas la règle/la loi ou le modèle. C'est un moyen pour construire l'apprentissage, par lequel le commencement de l'apprentissage/enseignement est « pensé », matérialisé. Le moyen est montré et l'usage est recherché et discuté collectivement. L'incitation productive est alors, pour nous, très fortement collective, puisqu'elle met en relation les expériences de la classe, fortement liées aux temps des situations, elles-mêmes inscrites dans la mémoire de l'élève par l'étude des objets de savoir. L'idée est que chacun doit apprendre à voir ensemble les signes dont parle le professeur avec l'évocation de la référence.

L'incitation productive, répétons-le, veut être fortement collective. Reprenons notre exemple. Le professeur débute avec la définition de l'annonce en trois termes. C'est au tour d'un élève de continuer, et cette fois-ci, avec la définition du lancer. Puis le professeur reprend la main et annonce que le jeu est changé. Il marque fortement la rupture avec la séance précédente (et plus encore avec le module précédent). Les élèves ont joué à écrire des annonces gagnantes précédemment. Les annonces étaient gagnantes parce qu'elles étaient égales au lancer. Le professeur parle d'un nouveau contrat. Il n'explicite pas la règle, la loi, ou l'application comme dans le modèle de l'École classique. Non, le professeur montre simplement la rupture. Maintenant, les élèves recherchent quel pourrait être le changement. Le jeu (la recherche) est passé dans le camp de l'élève. La définition du lancer est devenu le problème de l'élève. Ici, la dévolution se trouve illustrée très succinctement par la recherche du rapport du lancer et de l'annonce. Maintenant, il est de la responsabilité de l'élève de définir ce nouveau contrat, avec le soutien du professeur. Le rôle de ce dernier consiste à « guider » l'élève par la dialectique de l'expression et de la réticence. Le professeur doit choisir de taire ou dire certains éléments afin d'orienter le questionnement, le déroulement de l'enquête collective pour l'apprentissage/enseignement. Un nouveau contrat prend naissance peu à peu dont l'étude est réalisée toujours conjointement. L'enjeu est l'apprentissage avec le gain de l'élève et du professeur. L'élève ne sait pas toujours comment gagner. Il va donc devoir apprendre.

L'élève s'interroge et travaille dans l'élaboration du nouveau contrat/milieu. La contrainte supplémentaire ne peut concerner le nombre de termes puisque sur le tableau, il est noté deux termes pour le lancer et trois termes pour l'annonce. Ces éléments sont connus. La différence des contrats se situe sur la comparaison du rapport entre l'annonce et le lancer. Il s'agit du lancer mais ce n'est pas le nombre de termes comme nous l'avons précisé. Le professeur ne dit toujours rien mais l'élève commence à entrevoir que la comparaison porterait peut-être sur la relation entre l'annonce et le lancer. L'élève émet la proposition que l'annonce serait donc différente du lancer. Le professeur valide cette hypothèse. Il est d'accord. Puis il précise que cela n'est pas suffisant. Il est nécessaire de définir cette différence. Pour définir cette différence, l'élève doit rechercher comment il pourrait caractériser la différence entre le lancer et l'annonce. En somme, l'élève a deux possibilités par rapport à l'ancien contrat. L'annonce, est-elle plus grande ou plus petite ? En effet, une annonce différente peut être supérieure ou inférieure au lancer puisqu'auparavant, il a été dit dans la classe que l'annonce était égale au lancer. Dans les transcriptions, nous serons attentifs au « quand, comment et pourquoi », le professeur choisit de dire et de montrer certaines choses, de même que les temps où il choisit de se taire. Le professeur acquiesce à la proposition de l'élève. Il précise que l'annonce est supérieure au lancer.

5.3 Quelles sont les stratégies professorales pour mettre en œuvre l'incitation productive collective ?

L'élève connait maintenant le nouveau contrat/milieu qui consiste à écrire des annonces en trois termes supérieures au lancer en deux termes. La relation entre l'annonce et le lancer a été définie par la participation de l'élève. Le professeur pourrait choisir de s'arrêter là. Pour nous, il ne serait pas question d'incitation productive collective parce que l'élève n'aurait pas construit la relation privilégiée avec le milieu. Pour cela, le professeur va « ralentir » le temps didactique de la mise en oeuvre individuelle dans le Journal du Nombre puisque le but de ce travail dans le contrat est de construire un rapport d'enquête, donc de construire l'activité au sein du milieu-problème.

Le second temps de l'incitation productive collective travaille, spécifiquement, la mise en place d'un milieu adéquat par la mise en enquête. Maintenant, l'élève connait le contrat. Le contrat ouvre sur le milieu pour y être étudié conjointement puisqu'il déploie un paysage dans lequel l'élève doit se situer pour résoudre un problème, relatif à certaines parties de ce paysage structuré (le contrat). Une fois, la définition du nouveau contrat réactualisé, le professeur doit s'assurer que l'élève dispose de moyens pour jouer adéquatement au jeu (ici, le jeu consiste à écrire une annonce en trois termes supérieure à un lancer en deux termes). Pour cela, le professeur sollicite, pour la proposition de l'annonce, un élève de la classe (pour l'écriture d'une annonce en trois termes au tableau). L'annonce notée par l'élève au tableau est soumise à la discussion de la classe. L'élève, devant le tableau, a proposé et écrit l'annonce suivante « 4 + 4 + 4 ». La classe observe la proposition. L'écriture de l'annonce au tableau est recevable puisque celle-ci respecte la contrainte des trois termes nécessaires à la formation. L'annonce est valable dans le contrat/milieu défini précédemment. Pourtant, l'enquête sur l'annonce n'est pas terminée. L'écriture de l'annonce comporte trois termes, comme la contrainte l'impose. L'écriture additive en trois termes de l'annonce désigne alors un nombre. Quel pourrait être le nombre désigné par l'annonce en trois termes ? La classe « entre » à nouveau en questionnement, mais sur le nombre représenté par l'annonce. C'est une question de grande importance. Il s'agit pour le professeur de faire comprendre à l'élève « comment on joue au jeu demandé », de doter celui-ci d'un minimum de *règles définitoires* sinon le jeu est impossible. Travailler le contrat, c'est donc appréhender des règles définitoires. Si l'élève sait/connait le nombre représenté par l'annonce en trois termes, la somme calculée lui permettra de proposer un lancer peut-être erroné mais adéquat à la situation. Toutefois, l'élève peut travailler sans connaître la somme avec la comparaison par la minoration et la majoration. Rappelons que le lancer doit être plus petit que le nombre de l'annonce. Le savoir (le calcul de la sommes et/ou les stratégies de comparaison, la majoration et la minoration) devient une puissance d'agir. Il permet le gain. C'est parce que l'élève connait le nombre de l'annonce en trois termes qu'il peut proposer un lancer en deux termes *plus petit*. C'est parce que l'élève compare les deux écritures additives et use de la majoration ou de la minoration qu'il peut proposer une annonce plus grande que le lancer. Il est donc absolument nécessaire de connaître le nombre de l'annonce (la somme) pour être en capacité de faire des propositions de lancer adéquat (un lancer en deux termes plus petit que l'annonce en trois termes) ou d'user de comparaison. Ensuite, l'élève pourra comparer à nouveau l'annonce au lancer. Il éprouve le besoin de la connaissance du nombre-tout de l'annonce (les trois termes) en situation mais devra toutefois recourir à la comparaison. L'élève cherche un lancer plus petit que l'annonce mais un lancer inférieur peut correspondre à plusieurs nombres. Pour cela, le savoir du nombre désigné par l'annonce est nécessaire et même indispensable et/ou une connaissance du nombre ou des relations entre les nombres. L'élève recherche un lancer inférieur à « 4 + 4 + 4 » pour respecter la contrainte. L'élève n'applique pas une règle comme dans le modèle de l'École classique. Le choix pour l'écriture du lancer est multiple (plusieurs propositions sont possibles) et plusieurs moyens sont à sa disposition.

Tout d'abord, la classe va débattre des réponses proposées par les élèves au sujet du nombre de l'annonce. Les élèves font des propositions pour l'annonce « 4+4+4 » et les nombres sont différents. Il existe un désaccord puisque la somme de l'annonce est désignée par 12, 13 ou 14. Le professeur n'impose pas la réponse avec le nombre juste. Il n'impose pas que 4 + 4 + 4, c'est douze. Le professeur choisit de construire la certitude du nombre représenté par l'annonce en trois termes, toujours conjointement. La preuve que « 4 + 4 + 4 » représente bien le nombre 12 doit être obtenue /construite collectivement.

L'annonce « 4 + 4 + 4 » désigne le nombre 12, pour cela, le professeur oriente l'attention de l'élève sur des objets de savoir (la ligne graduée). Lors de l'élaboration conjointe de la certitude raisonnée, ces objets de savoir vont servir à construire la preuve.

Le professeur introduit un objet sémiotique en pratique dans la classe, la ligne graduée lors du débat. La ligne graduée va permettre de coder l'annonce « 4 +4 + 4 » par une représentation réalisée à l'aide de trois bonds de quatre. Chaque bond représente un intervalle de 4 graduations sur la ligne. L'ensemble de toutes les graduations (les trois bonds de quatre) représente et désigne le nombre total de l'annonce, la somme. C'est une ligne sur laquelle on trouve des repères plus accentués pour le comptage de 5 en 5 et/ou de 10 en 10.

L'élève annonceur de la proposition « 4 + 4 + 4 » est invité à représenter l'annonce en trois termes, sur la ligne. Il trace trois bonds de quatre, un pour chaque terme de l'écriture additive. Pour le choix de l'annonce en trois termes au tableau, le professeur avait appelé un élève moins avancé qui levait la main. Toutefois, cet élève, précisons-le, n'est pas un élève hors jeu. L'élève participe aussi au dispositif d'anticipation (le dispositif sera précisé dans le chapitre 10). Cela pourrait permettre, pense le professeur, de renforcer certaines conceptions du nombre en favorisant un débat autour de certaines erreurs.

La pratique de classe consiste à tracer un bond de quatre sans compter les graduations. Pour cela, l'élève devrait utiliser les repères du 5 et du 10. Ainsi le tracé du premier bond de quatre s'arrête juste devant le trait renforcé du nombre 5 puisque avant le trait renforcé du 5, c'est le nombre 4. Après quelques essais, la classe valide le tracé définitif pour l'annonce « 4 + 4 + 4 » sur la ligne graduée.

Le professeur avait noté toutes les propositions (12, 13 et 14) au tableau. Il s'agissait d'une sorte d'étayage pour soulager la classe dans la mémorisation des différents résultats. Le professeur avait donc écrit 4 + 4 + 4 = 12, 4 + 4 + 4 = 13 et 4 + 4 + 4 = 14 (ce sont les propositions émises par les élèves pour la somme de l'annonce « 4 + 4 + 4 »). Par la présence du signe « = », un élève semble s'orienter dans une voix différente, la recherche du lancer. En effet, le signe « = » (dans l'ancien contrat il notait l'égalité entre l'annonce et le lancer et donc du gain puisque l'annonce était à ce moment-là gagnante) semble amener quelques élèves à penser que la classe est maintenant à la recherche d'une proposition pour le lancer. On est là tout à fait dans le cas de la sémiose du contrat par les élèves, qui ont pris l'habitude que le signe « égal » soit relié au jeu des annonces. Le signe « égal » pourrait être paraphrasé comme « chercher le lancer égal à l'annonce ». A ce moment, il semble que c'est cette signification que certains élèves mobilisent. En fait, il s'agit toujours de la somme de l'annonce. On comprend, par cet élément signifiant, toute l'importance du savoir « comment jouer ». Il montre la nécessité d'un savoir « comment jouer » minimum, sans lequel, le jeu (l'enseignement/apprentissage) ne peut se construire.

Le signe « = » entraîne la comparaison entre deux groupes de termes, les nombres écrits à droite et ceux écrits à gauche. Il code l'équilibre, l'équivalence entre les deux écritures. Elles sont une représentation différente du *même nombre*. Tout de suite, un élève souhaite invalider le nombre 14 pour un motif très précis. La contrainte du lancer en deux termes n'est pas respectée. Un autre élève prend la parole. Il propose une transformation pour le nombre 14 qui tient compte de la contrainte par l'ajout du zéro (et le signe « + »). L'argument de la nécessité des deux termes pour le lancer serait ainsi respecté.

L'élève (celui de la proposition de l'ajout du zéro au nombre 14 pour le respect de la contrainte des deux termes pour l'écriture du lancer) utilise peut-être des connaissances personnelles ou bien des connaissances construites lors de la situation « dés et doigts » sur le zéro (entre autre). En effet, le zéro est un élément neutre. Il permet de garder la même valeur à l'écriture additive, tout en respectant la contrainte des deux termes. Pourtant, le nombre 14, calcul de la somme, est erroné (4 + 4 + 4 n'est pas égale à 14). Des élèves pensent que l'écriture n'est pas acceptée parce qu'il manque un terme alors que le rejet porte sur le calcul de la somme erroné. L'écriture 14 + 0 ne peut être acceptée. L'élève du début (celui qui ne prenait pas quatorze puisque le lancer doit contenir deux termes) reprend la parole pour signifier, une nouvelle fois, son désaccord. Maintenant, la mésentente porte sur le choix des nombres possibles pour composer le lancer (la composition du lancer est liée aux contraintes du milieu défini par le dé). Cette fois-ci, l'élève invalide la proposition pour le motif suivant qu'il n'y a pas de nombre « zéro » sur le dé. Cet élève applique ainsi indument à l'annonce (dont la référence est la main) une contrainte liée au lancer (dont la référence est le dé).

La réticence du professeur cesse. A son tour, le professeur devient expressif. La classe ne peut s'éloigner de l'objet de savoir plus longtemps au risque de « s'égarer » totalement de l'objet de l'enquête (du savoir). Le professeur sort du silence puisque le gain (l'apprentissage) n'est plus possible. Il est temps de préciser que la recherche du nombre calculé n'est pas le lancer (avec le dé en référence) mais l'annonce (avec la main en référence). La recherche concerne l'annonce et le nombre désigné par la somme des trois termes. Le professeur devait impérativement sortir du silence. Pour la classe, le risque est majeur d'emprunter d'une direction trop éloignée du savoir visé, à construire. Le « mélange » des différentes écritures (l'écriture de l'annonce et l'écriture du lancer) avec la confusion des contraintes respectives perturbe la compréhension et le déroulement du jeu. La contrainte du refus du zéro ne « vaut » que pour l'écriture du lancer. Les élèves invalident les nombres 13 et 14 initialement proposés. Ils barrent le signe « = », maintenant, celui-ci montre la différence « ≠ ». Ce signe indique alors « n'est pas égal à ... ».

L'entente commune s'est construite dans le contrat/milieu à partir de l'annonce à trois termes (4 + 4 + 4) proposée par un élève. Elle a permis la comparaison avec le lancer en deux termes sans oublier la contrainte du rapport au lancer plus petit que l'annonce. Il reste encore à la classe à « s'entendre » sur une proposition pour le lancer, c'est-à-dire à produire une écriture pour le lancer qui soit à la fois en deux termes *et* plus petite que le nombre 12. Une élève avancée propose le lancer le plus petit réalisable avec deux dés (1 + 1).

6. LES ANALYSES

Nous présentons l'ensemble des éléments signifiants dans un tableau. Celui-ci est fragmenté en plusieurs phases afin de procéder à l'analyse de la séance du 5 décembre 2013, (cela à partir des fichiers vidéos 414 et 415). Nous choisissons de rassembler dans une même phase des éléments signifiants d'un même épisode didactique. Chaque partie du tableau « fragmenté » comprend trois colonnes. La première colonne recense le numéro ou la série des tours de paroles associé au fichier vidéo de la transcription. La seconde colonne identifie les épisodes didactiques. La troisième colonne évoque les éléments signifiants. Avec la mise en tableau des éléments signifiants, nous tentons de montrer deux enjeux importants de la définition de l'*incitation productive collective* lors de l'élaboration des connaissances. Nous parlons de la nécessité d'un temps relativement long nécessaire à la compréhension de la connaissance du jeu demandé (faire jouer le jeu pour le professeur). Ensuite, cette connaissance se construit nécessairement *conjointement*. Cela nous semble apparaître dans la chronologie de la séance (associé au fichier 414). L'analyse des éléments signifiants nous permettra de valider ou non cette hypothèse. La durée de la séance complète (le temps de la « leçon ») est de trente-sept minutes.

6.1 L'intrigue didactique synoptique

Nous présentons un tableau reprenant les huit phases de l'intrigue de la séance du 5 décembre 2013.

Phase 1	La mise en place du décor de la scène didactique (le travail dans le contrat). L'élève identifie la rupture de contrat entre l'ancien et le nouveau (la permanence et le changement).
Phase 2	L'élève recherche le nombre représenté par l'annonce en trois termes pour produire un lancer en deux termes plus petit.
Phase 3	Le changement de contrainte, l'annonce est supérieure au lancer. Auparavant, l'annonce était égale au lancer.
Phase 4	L'élaboration de la certitude raisonnée par l'apport de la ligne graduée.
Phase 5	Le plus petit lancer possible (écriture avec les contraintes/modélisation).
Phase 6	Le temps des premières productions dans le Journal du Nombre produites à partir de l'incitation productive collective.
Phase 7	Des productions d'élèves commentées et discutées « en direct » avec la classe. Elles comprennent les nombres impossibles comme 100 ou 1000 et même 6 (pour le nombre 6, c'est plus que les doigts d'une main). Cela semble favorisé par la recherche d'une annonce forte puisque la situation travaille l'annonce plus grande que le lancer.
Phase 8	Observation collective des productions d'une élève dans son Journal du Nombre comme 5 + 5 + 5 > 2 + 2 et 2 + 3 + 3 > 2 + 1.

Phase 1 de l'intrigue

Il s'agit de la mise en place du décor de la scène didactique (le travail dans le contrat). L'élève identifie la rupture de contrat entre l'ancien et le nouveau (la permanence et le changement).

Tours de parole	Les épisodes didactiques du fichier 414	Éléments signifiants
Tdp de 48 à 60	Rupture du contrat	Production d'annonces perdantes parce que Annonce > Lancer

Phase 2 de l'intrigue

L'élève recherche le nombre représenté par l'annonce en trois termes pour produire un lancer en deux termes plus petit.

Tours de parole	Les épisodes didactiques du fichier 414	Éléments signifiants
Tdp de 65 à 77	Le savoir est une puissance d'agir	La contrainte des trois termes pour l'annonce. Calculer la somme des trois termes et désigner le nombre-tout permet à l'élève de pouvoir proposer un lancer inférieur à l'annonce.
Tdp 85 à 91	Débat sur la validité de l'annonce	Hésitations
Tdp 100 à 113	Débat sur la somme des trois termes : 12 ou 14 ?	trois fois le même terme, est-ce possible ? 14 est rejeté parce qu'il n'y a pas deux termes
Tdp 143	Respect de la contrainte du lancer avec l'ajout de l'élément neutre	Proposition d'un élève 14 + 0
Tdp 158	La proposition (14 + 0) est invalidée par un élève	Il n'y a pas de zéro sur le dé

Phase 3

Le changement de contrainte, l'annonce est supérieure au lancer. Auparavant, l'annonce était égale au lancer.

Tours de parole	Les épisodes didactiques du fichier 414	Éléments signifiants
Tdp 158	La proposition (14 + 0) est invalidée par un élève	Il n'y a pas de zéro sur le dé
Tdp 159	Le professeur sort de la réticence	Le nombre 14 ne désigne pas le lancer
Tdp 163	Une élève propose le nombre 12 pour l'annonce « 4 + 4 + 4 »	« 4+4+4 », c'est égal à 12, j'ai calculé.
Tdp 169	Modification de la proposition 14 en nombre 13	L'élève annonceur de 14 propose plutôt 13

Phase 4

L'élaboration de la certitude raisonnée par l'apport de la ligne graduée

Tours de parole	Les épisodes didactiques du fichier 414	Éléments signifiants
Tdp 181	Le professeur inroduit un objet sémiotique comme preuve	La ligne graduée pour tracer les bonds et valider le nombre-tout
Tdp de 237 à 252	Deux traits après le trait de 10	Un élève dit : « je sais comment prouver ».
Tdp 257 à 314	La représentation sur la ligne graduée de l'annonce « 4 + 4 + 4 »	C'est trois bonds de quatre mais également un bond de dix et un bond de deux mais toujours le nombre douze.
Tdp 316	Le signe ≠ pour invalider 13 et 14	$4 + 4 + 4 \neq 13$ $4 + 4 + 4 \neq 14$

Phase 5

Le plus petit lancer possible (écriture avec les contraintes/modélisation)

Tour de parole	Les épisodes didactiques du fichier 415	Épisodes signifiants
Tdp 14	Proposition d'un lancer pour l'annonce « 4 + 4 + 4 »	Il s'agit de « 1 + 1 »

Phase 6

Le temps des premières productions dans le Journal du Nombre produites à partir de l'incitation productive collective

Tour de parole	Les épisodes didactiques du fichier 415	Épisodes signifiants
Tdp 23	Annonces perdantes mais impossibles	Comme 100 + 100 + 100 ou l'infini
Tdp 79	Annonces « presque possibles » mais hors contrat	Comme 5 + 6 + 1 Refus puisque sur une seule main, il ne peut y avoir six doigts
Tdp 87	Retour de l'annonce impossible avec le nombre 100	Refus pour le motif identique
Tdp 93	Annonce impossible doublement perdante	Refus puisque c'est une annonce impossible. Cela montre que l'élève ne sait pas jouer

Phase 7

Des productions d'élèves commentées et discutées « en direct » avec la classe

Tour de parole	Les épisodes didactiques du fichier 415	Épisodes signifiants
Tdp 109	Orientation du signe « > »	Un élève demande : est-ce que le signe

Tour de parole	Les épisodes didactiques du fichier 415	Épisodes signifiants
		« > » peut être écrit dans l'autre sens
Tdp 193	Questionnement sur le zéro	Peut-on écrire des zéros ?
Tdp 202	Le professeur demande si la question de l'écriture du zéro concerne l'annonce ou le lancer	Une élève intervient pour préciser qu'elle a écrit des zéros. Elle montre au professeur son Journal du Nombre
Tdp 217	Les nombres du dé	Une élève précise de 1 à 6

Phase 8

L'observation des productions d'un Journal du Nombre par l'ensemble de la classe

Tour de parole	Les épisodes didactiques du fichier 415	Épisodes signifiants
Tdp 295	Le Journal du Nombre d'une élève pour donner à voir « l'arrière-plan construit » aux autres élèves de la classe	5 + 5 + 5 > 2 + 2 2 + 3 + 3 > 2 + 1

6.2 Les éléments de savoir lors de l'incitation productive collective

Nous observons les tours de parole de 48 à 60 (phase 1). Ils se situent au début de la séance. Il nous semble définir très précisément la rupture de contrat par la mise en évidence des invariants (trois termes pour l'annonce et deux termes pour le lancer) et le repérage du changement (écrire des annonces perdantes parce qu'elles en sont pas égales au lancer).

Comme nous l'avons précisé ci-dessus, dans le contrat précédent, l'élève écrivait des annonces gagnantes. Pour être « reconnues » comme des annonces gagnantes, elles devaient être *strictement égales* au lancer. Maintenant, le professeur guide l'élève dans l'identification de la rupture du contrat et des conséquences. L'élève doit écrire des annonces perdantes mais il est nécessaire de définir pourquoi les annonces sont perdantes. Nous pourrions dire que le professeur « fait jouer le jeu » et pour cela il commence par centrer l'attention de l'élève sur un « jeu particulier » (les annonces perdantes). C'est la mise en évidence du changement de contrat/milieu par le repérage des similitudes et des différences entre les deux contrats, l'ancien et le nouveau contrat qui dénotent avec précision la rupture.

Dans le contrat précédent, l'élève devait écrire des annonces qu'il définissait tout d'abord comme pareilles (Tdp de 5 à 8) avant de préciser « égales ». Une élève comprend alors que la rupture se trouve précisément à « cet endroit ». Le professeur « montre » un « objet ». L'élève situe le nouveau contrat en rapport avec l'ancien contrat. Auparavant, les annonces étaient égales et maintenant, l'élève pense que les annonces ne sont « pas égales ».

Le professeur reprend la main pour demander de préciser ce que peut/veut dire « pas égales ». Le complément de précision attire l'attention de la classe sur un temps important, la définition de la rupture du contrat précédent et du nouveau milieu pour la production des annonces à trois termes.

Tdp 48 (4mn29), P : annonces perdantes/P/annonces perdantes/alors/je vais modifier la règle du jeu/les annonces elles vont/jusqu'à maintenant on écrivait des annonces qui étaient comment par rapport au lancer

Tdp 49, (4mn40), E (Joseph) : gagnantes

Tdp 50, P :oui mais/pour qu'elles soient gagnantes/il fallait qu'elles soient comment

Tdp 51, E (Anne) : pareilles

Tdp 52, Es : pareilles

Tdp 53, (4mn45) E : égales

Tdp 54, P : oui/pareilles ça veut dire

Tdp 55, Es : égales

L'attention n'est donc pas centrée sur le nombre de termes différent pour l'annonce et le lancer. La spécificité du nombre de termes pour l'annonce et le lancer appartenait déjà à l'ancien contrat (trois termes pour l'annonce et deux termes pour le lancer). La discussion porte davantage sur la différence, c'est-à-dire le rapport « différent » entre l'annonce et le lancer, comme nous le montrent les échanges. L'annonce est perdante. L'élève doit envisager les conséquences de ce que peut/veut dire « perdant » par rapport au lancer afin de pouvoir jouer : on perd si l'annonce n'est pas égale au lancer. Pour cela, il est nécessaire d'aider à caractériser la nature de la différence avec le lancer. Tout d'abord, la différence est notée comme une annonce inférieure ou supérieure au lancer. C'est ce que nous montre le Tdp 59 et les propos de l'élève puisqu'il envisage la différence entre l'annonce et le lancer sous les deux possibilités, une annonce plus petite ou plus grande.

Tdp 59, E (André), plus petite que ou plus grande

Le Tdp 59 entrevoit les deux options possibles de la différence mais le Tdp 60 ne laisse pas de place à l'incertitude. Les propos du professeur affirment avec précision le choix retenu. L'annonce sera plus grande que le lancer.

Tdp 60, P, elle va être plus grande/l'annonce va être plus grande pour être perdante/plus grande que le lancer/ha/qui est capable de nous proposer une annonce/pour l'instant une annonce en trois termes/Richard lève le doigt/allez/heu/tu viens nous l'écrire Richard

L'ancien contrat/milieu est maintenant caduque. Il laisse la place au nouveau contrat/milieu, qui consiste à produire des annonces en trois termes supérieures à un lancer en deux termes.

L'élève propose une annonce en trois termes sous la forme d'une écriture additive « 4 + 4 + 4 ». Sous la sollicitation du professeur, la classe s'interroge sur la validité d'une telle annonce. Un échange montre les questionnements des élèves. Un élève ne « prendrait pas » (n'accepterait pas cette écriture) parce que c'est toujours le nombre 4. La majorité des élèves n'est pas d'accord puisque « 4 + 4, c'est 8 » donc l'argument qui s'impose est le suivant : « cela représente beaucoup plus ». Cela se traduit ainsi : « 4 + 4 + 4 » n'est pas égale à 8, c'est beaucoup plus que le nombre 8 (proposition d'une élève). Un autre élève semble être d'accord pour le refus. Il avance l'argument que le jeu se joue avec deux dés. Il semblerait qu'il refuse peut-être les trois termes puisqu'on ne dispose pas de trois dés. Il peut également exister une certaine confusion entre les contraintes de l'annonce (trois termes) et du lancer (deux termes).

Tdp 75 (6mn16), E (Anne) : on peut pas faire avec le dé parce qu'on a que deux dés

L'indécision de la classe sur la recevabilité de l'annonce 4+4+4 est grande. L'accord est pourtant essentiel parce que de l'accord dépend la possibilité de jouer de manière *adéquate*. L'enjeu est donc de déterminer le nombre-tout, la somme de l'écriture additive des trois termes de l'annonce afin de pouvoir proposer un lancer qui respecte la contrainte. Le lancer doit être plus petit que l'annonce. Le désaccord porte alors sur la somme de l'annonce, peut-être le nombre 12 ou bien encore le nombre 14 comme nous le montre les Tdp suivants.

Tdp 100, E (Adrien) : ben/moi je sais pas parce que/c'est/ ça fait/vu que/ ça fait 14 *tdp 104, E (Jean-Louis):non/ça fait 12*

La classe s'imagine rechercher le lancer et cette impression semble être accentuée par la présence du signe « = ». Le professeur a noté sur le tableau les différentes sommes proposées pour l'annonce « 4 + 4 + 4 ». Cela amène un élève à rejeter le nombre 14 parce que celui-ci n'a qu'un seul terme et le lancer doit en comporter deux. Finalement, au Tdp 163, un autre élève affirme que le calcul qu'il a effectué désigné le nombre 12.

Tdp 163, E (Anne) : ben parce que/parce que c'est pas égale/j'ai calculé mais ça fait pas 14/il a dû se tromper Adrien/ça fait même 12

Il est temps de clore la période de doute sur la recherche de la somme. Pour cela, le professeur introduit un objet sémiotique en usage dans la classe : la ligne graduée.

Tdp 181, P : bon alors/tiens/on va se servir/chut/attends/attends/attends/attends/la ligne graduée/attends/fais nous un bond de quatre STP

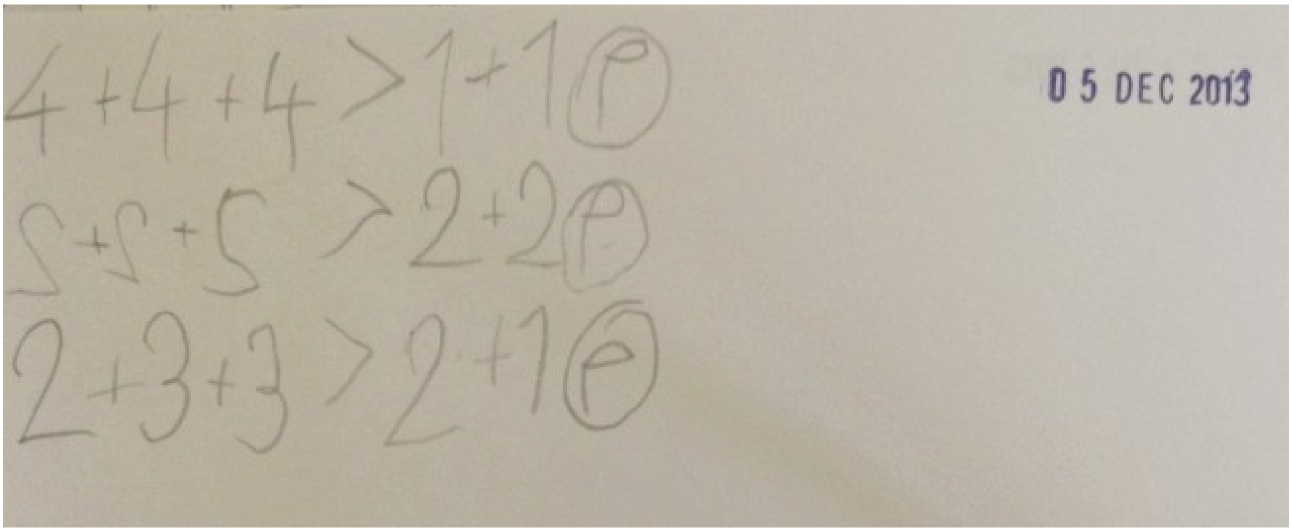
La classe s'engage sur le codage, la représentation des trois bonds de quatre, traduction de « 4 + 4 + 4 ». Cela ne suffit pas pour le professeur qui contraint l'élève à verbaliser que le nombre recherché est assurément 12 et pas un autre nombre. Il y a nécessité à fournir la preuve. La preuve est fournie par Christophe au Tdp 251.

Tdp 251, E (Christophe) : je/je viens de remarquer que ça peut que être 12 parce que c'est heu deux carreaux après/après le tiret du dix

Puisque l'annonce représente le nombre 12, l'élève peut dorénavant proposer un lancer plus petit que 12. C'est ce que montre le Tdp 14, (le second fichier, 415) avec les rires de Isabelle et un lancer « 1+1 ». L'épisode se clos par l'étude dans le Journal du Nombre.

*Tdp 14, E (Isabelle) : elle est plus grande que ça/***Isabelle a écrit « 1 + 1 » au tableau, à la suite de l'annonce en trois termes et après le signe « = »***/***rires**

L'enquête est à poursuivre dans le contrat/milieu défini lors de l'incitation productive collective. Pourtant, il reste encore des zones d'ombre. Nous les repérons avec les interventions de quelques élèves. Ce sont des interrogations sur la validité de certaines annonces du type 100 + 100 + 100. Une annonce perdante n'est pas une *annonce impossible*. Une annonce impossible est bien sûr une annonce perdante puisque celle-ci ne tient pas compte des contraintes du jeu mais la réciproque n'est pas vraie. Une annonce impossible est une annonce « invalide » puisque celle-ci montre que l'élève ne joue pas au jeu demandé puisqu'elle n'est pas dans la modélisation du système « main ». C'est en sorte une annonce hors jeu, elle n'est donc pas valable. La référence au jeu des annonces « dés et doigts » permet à l'élève de rejeter ce type d'annonce. Il existe les annonces presque « conformes » comme 5 + 6 + 1 qui sont une autre source de questionnement. Le professeur, après avoir fait invalider les annonces précédentes et formuler les critères de refus, ouvre un espace de discussion sur les productions dans le Journal du Nombre d'une élève. Un second temps, très court, va consister à observer la conformité de ce travail avec la production écrite au tableau lors de l'incitation productive. Ci-dessous, le Journal du Nombre d'une élève, entrée dans le travail individuel, qui montre des écritures de plusieurs annonces perdantes mais elles ne sont pas impossibles. Le professeur demande à la classe d'étudier la production d'élève.



Essai

Photographie n°42 : les premières productions dans le Journal du Nombre

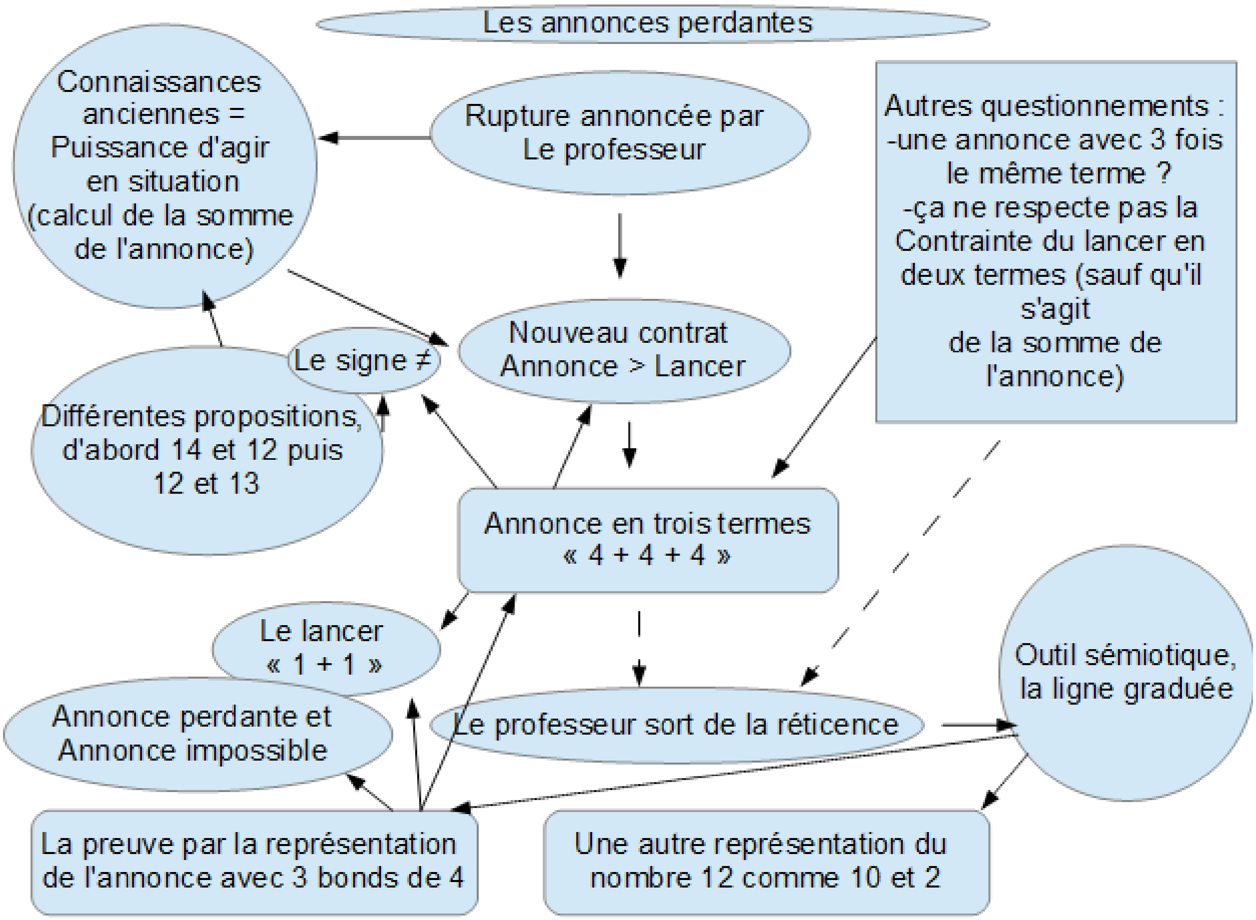
Date, le 5 décembre 2013

La première écriture (4 + 4 + 4 > 1 + 1) correspond à la proposition élaborée conjointement lors de l'incitation productive collective. Elle est « recopiée » par l'élève sur le Journal du Nombre, de son propre mouvement. Elle sert alors sans doute de modèle ou mieux de référence sur laquelle l'élève peut s'appuyer afin de valider les écritures suivantes produites (avec les mêmes contraintes). Elle garde ainsi en mémoire la référence construite lors de l'incitation productive collective. On peut faire l'hypothèse qu'elle la rapproche en la notant sur le Journal du Nombre comme une « règle » à ne pas oublier. Nous assistons au passage de la « référence » du tableau au Journal du Nombre (cahier) comme une appropriation personnelles des connaissances. Cette élève semble fonctionner ainsi lors de l'étude dans le Journal du Nombre. Elle recopie « l'annonce » à partir de laquelle le savoir s'est construit (lors de l'incitation productive collective). Les traces du tableau pourraient être effacées (disparaître). Ainsi, elles restent visibles et concrètes puisque notées sur le Journal du Nombre de l'élève.

La seconde écriture(5 + 5 + 5 > 2 + 2) est une production personnelle de l'élève qui s'essaie au jeu demandé. Nous remarquons que les nombres choisis ne sont pas les mêmes contenus dans les deux écritures mais il existe un point commun. Le choix très restreint des nombres en jeu. En effet, la première se compose des nombres 4 et 1, tandis que l'autre, n'utilise que le nombre 2.

La troisième écriture (2 + 3 + 3 > 2 + 1) semble montrer une élève disposée à faire des expériences à partir des écritures dans le jeu demandé pour découvrir comment gagner au jeu. Pour cela, elle augmente le choix des nombres et varie la composition des écritures de l'annonce et du lancer. La stratégie du groupement ne semble pas employée. Peut-être l'élève envisage-t-elle de prime abord l'écriture du lancer avant l'écriture de l'annonce pour assurer le gain. Le lancer (2 + 1) c'est 3, il suffit alors d'ajouter deux autres nombres à l'annonce en plus du nombre 3 pour obtenir l'assurance du gain.

Nous réalisons une schématisation des différents éléments signifiants présents lors de l'incitation productive collective issus de la séance du 5 décembre 2013. Elle montre les liens comme les « aller-retour » nécessaires à l'élaboration des connaissances. L'apprentissage/enseignement semble ne pas pouvoir se caractérisé par l'image d'un « sablier » avec un cheminement descendant et/ou ascendant mais plutôt par des « détours/déviations » et/ou des « sauts » dans les connaissances acquises, en cours d'acquisition et *même* en devenir.



Schématisation de l'incitation productive collective

Date, le 5 décembre 2013

Nous aimerions, par la schématisation ci-dessus, tenter une mise en évidence d'un aspect essentiel, nous semble-t-il, de l'élaboration des connaissances. Il s'agit, dans le processus d'apprentissage, de la notion de « non linéarité ». La construction du savoir visé pourrait s'envisager comme un flux continu « d'aller et de retour » entre des connaissances anciennes et des connaissances futures. Les « aller et retour » cernent le savoir et participent à l'identification du jeu demandé par le professeur. Cette construction conjointe organise, selon nous, des éléments de la dévolution. Mais, elle n'indique pas une hiérarchisation des savoirs. C'est parce que le professeur permet à l'élève de continuer l'étude/enquête, même sans la maîtrise parfaite des connaissances, que celui-ci continue à apprendre et progresser.

Nous retraçons quelques-uns des « aller-retour » présents lors du temps de l'incitation productive collective. L'annonce de la rupture du contrat incite l'élève à la recherche de la définition du nouveau contrat, (recherche conjointe). Pour cela, l'élève « fait usage » de ses connaissances anciennes construites ou en cours de construction (contrat précédent). Il constate les limites ou l'efficacité partielle avant de s'engager dans l'élaboration conjointe du nouveau contrat/milieu.

La recherche de la somme de l'annonce (le nombre désigné par l'écriture en trois termes) renvoie à la maîtrise de connaissances anciennes comme par exemple les répertoires additifs et les nombres irréguliers.

Lors de la construction de la preuve, nous insistons sur l'importance de la notion d'*entente commune*. L'élève démontre (se démontre et démontre aux autres) le nombre représenté par l'annonce « 4 + 4 + 4 ». Ainsi, l'élève poursuit la construction du Nombre dans un savoir étudié/travaillé, toujours en mouvement puisqu'il est revisité et pensé tout au long de la progression ACE. L'étude du nombre sous les différentes représentations comme par exemple « 4 + 4 + 4 », c'est 12 mais aussi « 10 et 2 » est un fil rouge et une constante de la progression/programmation.

Le nouveau contrat/milieu consiste à produire des annonces supérieures au lancer, il renforce la notion d'égalité, déjà abordée dans les premiers modules. L'élève apprend qu'une réponse à une question peut se coder par une pluralité d'écritures qui « disent » le même nombre. La proposition du lancer, en réponse à l'annonce, ne peut être « unique » et pourtant il s'agit bien toujours de la même annonce.

6.3 Faire jouer le jeu

Pendant que les élèves écrivent dans le Journal du Nombre, le professeur choisit à certains moments des productions d'élèves qu'il commente et discute « en direct » avec la classe. Nous choisissons d'analyser deux temps de discussion. Nous les classons dans la catégorie des éléments signifiants (le choix de productions d'élèves par le professeur à certains moments).

Afin de mieux appréhender les transactions didactiques au sein des jeux d'apprentissage, lors du choix de productions d'élèves par le professeur à certains moments, nous utilisons les systèmes de descripteurs de la Théorie de l'Action Conjointe en Didactique (TACD) dont la notion de « faire jouer le jeu » et de « réticence/expression ».

Le professeur a fait jouer le jeu. La description du jeu d'apprentissage est centrée sur les transactions didactiques lors de l'incitation productive collective. Le travail du professeur a consisté à actualiser le jeu pour mener l'enquête dans un milieu-problème dont l'enjeu est un *jeu d'apprentissage.*

Nous observons lors d'un premier temps de discussion, une centration sur les productions du Journal du Nombre d'une élève. Ce temps fait suite à l'élaboration du contrat actualisé lors de l'incitation productive collective.

Pour le professeur, cela peut s'envisager comme un moyen de s'assurer de la continuation du « bon » déroulement du jeu (engager le « bon » déroulement de l'enquête et du travail *individuel* que les élèves vont avoir à faire). Pour l'élève, il s'agit de démontrer la réalité possible du jeu demandé par le professeur (la réalité du contrat actualisé). Nous y voyons la nécessité d'organiser un « passage » entre l'incitation productive collective du contrat actualisé à l'étude individuelle dans le Journal du Nombre. Nous sélectionnons certains tours de parole pour penser la nécessité du passage entre les deux temps, de l'incitation productive collective du contrat/milieu au travail dans le Journal du Nombre proprement dit.

Tdp 297 E(Isabelle) : 2 + 2 + 2 > 2 + 2

Tdp 298 (16mn01) P : on la prend

Tdp 299 E (Anne) : heu oui/ **Richard secoue la tête**

Tdp 300 P : tu dis non Richard/ 2 + 2 + 2/ben/on vérifie avec la ligne graduée

Tdp301 E (Isabelle) : ben si/ parce que/ y a

Tdp 302 P : attends/on va

Tdp 303 (16mn11) E (Richard) : c'est une annonce gagnante

Tdp304 P : c'est une annonce gagnante

Tdp 305 E (Richard) : oui

Tdp 306 E (Damien) : oui/c'est l'annonce gagnante/parce que 2 + 2 + 2/ça fait 6

Tdp 307 E (Richard) : 2 plus 2

Tdp 308 E (Damien) : et 2 + 2/ça fait 4

Les échanges rapportés ci-dessus laissent entrevoir un élève (Richard) aux prises avec le contrat précédent (produire des annonces gagnantes) et le contrat actualisé (écrire des annonces perdantes). Au début, nous pensions que l'élève était prisonnier des habitudes de l'ancien contrat, pourtant il semblait d'accord sur la validité de l'annonce. Pourquoi alors refusait-il l'annonce ? (Tdp 299, Richard secoue la tête) La proposition de Isabelle est juste, « 2 + 2 + 2 est plus grand que 2 + 2 ». L'annonce est donc perdante selon les contraintes définies lors de l'incitation productive collective. L'écriture respecte les contraintes de trois termes pour l'annonce et de deux termes pour le lancer. Nous pensons alors que la « perturbation » est en rapport avec l'enjeu du contrat actualisé. Le contrat « travaillé » stipule que l'élève écrit des annonces perdantes. L'élève Richard, lui est dans le jeu et il veut gagner. Comment pourrait-il gagner avec des annonces perdantes ?

L'hypothèse semble être confirmée par le Tdp 71 (de la même transcription). Lors de la reformulation de la consigne, nous constatons le « mélange » des termes « gagnantes » et « perdantes » associés à la tâche à réaliser énoncée par Richard dans le Journal du Nombre.

Tdp 71, E (Richard) : on fait une annonce gagnante et perdante

Le contrat actualisé est perçu par l'élève. Pourtant, il existe un « conflit d'intérêt ». L'élève est dans le gain. Il ne peut écrire des annonces perdantes pour gagner. Il semble alors les voir comme des annonces gagnantes puisqu'elles respectent les contraintes du contrat/milieu.

L'organisation du « passage » de l'incitation productive collective à l'enquête mathématique dans le Journal du nombre se poursuit avec la question des annonces constituées par de très grands nombres. En fait, ce sont des annonces hors jeu. Observons les tours de paroles de 82 à 92. Ils sont issus du second fichier vidéo (fichier 415, à la 5/6 ème minute). Nous remarquons là encore que l'élève cherche le gain. Un moyen trouvé pour l'obtenir semble être de noter fermement la supériorité de l'annonce sur le lancer par le choix d'un ou de nombres très grands. En quelque sorte, l'élève assure le gain par l'écriture d'un « nombre fort » (la « magie » du nombre 100 pour l'élève de C.P) dans l'annonce. L'élève s'engage alors dans l'écriture des annonces en trois termes avec des nombres autour de 100.

Tdp 82, P : ha ben/top top top/peut/tous les yeux sur moi/je ne peux pas écrire/ce genre d'annonces-là/100 + 100
Tdp 83, E (Isabelle) : ha
Tdp 84, P : attendez/plus 100/plus grand que 1 + 1
Tdp 85, E (Isabelle) : ha/ben ça
Tdp 86, P : l'annonce va/vas-y Isabelle
Tdp 87, E (Isabelle) : ça c'est sûr que/c'est vrai/mais/mais/sauf que/en fait dans/on/si on veut faire avec les mains/et ben moi/j'arriverais jamais à faire/ **Isabelle s'est mise debout à côté de sa chaise et montre une main/avec deux mains 100**
Tdp 88, P : he bien voilà/donc là/elle serait/dans ce jeu là/après/on va/on va quitter la référence/on va quitter le jeu des doigts/on va jouer bientôt avec des cartes/et après on jouera avec des dés/des dés de 20 et des dés de 100/donc on ira beaucoup plus loin

Tdp 89, E (André) : oui
Tdp 90, P : mais dans ce jeu/dans cette situation là/
Tdp 91, E : on va changer
*Tdp 92, P : on ne peut pas/elle est bien sûr perdante/***le professeur montre l'annonce avec 100, notée au tableau***/mais là/elle est impossible/donc/ça veu dire qu'on a pas respecté la règle du jeu/donc on sait pas jouer*

Le professeur précise que c'est une annonce certes perdante (puisque elle constitue une inégalité dans laquelle l'annonce est plus grande que le lancer), mais qu'il s'agit une *annonce impossible* dans le contrat actualisé puisqu'elle ne tient pas compte de certaines contraintes. Comme le souligne l'élève Isabelle au Tdp 87, l'annonce est vraie mais elle ne peut être montrée sur les doigts. Effectivement, l'annonce est vraie au sens mathématique. Il n'y a rien à redire sur ce fait. Une annonce avec le nombre 100 est assurément supérieure à un lancer noté « 1 + 1 ». Pourtant, elle est simplement « hors jeu » puisque l'annonce « 100... » ne peut être représentée avec les doigts. Dans cette situation-là, elle est rejetée même si la situation et le milieu vont pouvoir évoluer pour la rendre acceptable plus tard.

6.4 Des premiers éléments de synthèse

i) L'incitation est productive

Elle permet au professeur de faire jouer le jeu, c'est-à-dire d'étudier conjointement avec les élèves le contrat/milieu dans lequel l'étude/l'enquête mathématique va se dérouler. Elle définit le jeu d'apprentissage et dévolue la recherche du problème à l'élève. Elle est un temps d'échanges centrés autour du savoir visé, élaboré à partir des connaissances anciennes et futures.

ii) L'incitation est collective

C'est un temps qui produit beaucoup d'énoncés. L'enjeu consiste en la production de signes qui amène l'élève à apprendre et à produire des stratégies gagnantes. Le territoire de l'élève s'agrandit, puisque celui-ci doit prendre des responsabilités de plus en plus grandes. L'élève « expérimente » certaines stratégies par et avec le questionnement collectif autour et dans le savoir. Il réalise des tâtonnements. Ceux-ci sont provoqués par les échanges *nécessaires* à l'élaboration du savoir visé qui n'est pas donné ni fourni.

iii) Les stratégies professorales pour l'incitation productive collective

Dans le dialogue didactique, le professeur montre deux effets didactiques fondamentaux, la réticence et la production d'énoncés de valeur perlocutoire. Il existe une nécessité du dialogue didactique spécifique à la pragmatique de l'action. L'élève doit avoir des informations concernant le savoir mais la stratégie gagnante ne doit pas lui être divulguée. Les énoncés du professeur sont alors plus en rapport avec une valeur perlocutoire, dont l'impact est à rechercher dans l'action de l'élève. Nous insistons sur le fait que le professeur tait les règles stratégiques mais ce même professeur dit beaucoup de choses pour faire vivre les transactions. Ici, l'accent est fortement mis sur la réticence mais une insistance sur l'expression serait tout autant justifiée. Nous allons effectuer une accentuation sur l'expression et sur sa nature profonde en relation dialectique avec la réticence dans un paragraphe suivant (4.7).

6.5 Les différents types d'énoncés du professeur

Le professeur construit conjointement l'arrière-plan spécifique du savoir, lors de l'incitation productive collective. Il institue une étude du contrat. Pour cela, il ne dévoile pas l'enjeu de savoir présent dans la séance comme nous l'avons évoqué précédemment. Pourtant, le professeur *se trouve en nécessité de « parler » le contrat* pour amener/guider/orienter l'élève dans l'élaboration de rapports spécifiques aux objets de savoir à construire. L'élève doit pouvoir enquêter pour la production de savoirs. L'enquête impose au professeur l'usage, à la fois, de la réticence et de l'expression. Le professeur tait nécessairement les règles stratégiques pour assurer le gain, toutefois, il ne peut rester silencieux indéfiniment et sur tout. Comme il représente celui qui sait et qui sait avant tout le monde, cela l'oblige à endosser la responsabilité de dire certaines choses et de choisir d'en taire d'autres. Il occupe et/ou s'installe dans une posture d'expression dont l'enjeu est l'avancée ou le ralentissement du temps didactique. L'expression didactique est organiquement liée à la gestion du temps didactique.

Les questions que nous nous posons renvoient à la détermination de *la nature de l'expression* (le sur « quoi » parle le professeur), *le comment de l'expression* (le « comment » parle le professeur) et le *temps de l'expression* et sa *durée* (le « quand parle le professeur et à quels moments ?).

A partir des transcriptions de la séance du 5 décembre 2014, nous tentons une première observation des différents énoncés émis par le professeur. Il semble se dégager deux grandes catégories telle que la gestion du groupe (faire la classe) et l'étude/enquête dans le contrat (la transposition didactique). Nous précisons que ces deux types d'énoncés sont au service de la construction de savoirs. Les deux catégories « génériques » (gestion du groupe et l'étude/enquête dans le contrat/milieu) se déclinent ensuite en sous-catégories « spécifiques » comme le « temps didactique » et les « outils sémiotiques ». A partir des tours de parole issus des transcriptions, nous allons expliciter les différentes catégories et sous-catégories des énoncés du professeur.

Nous précisons que l'élaboration du savoir n'est pas de la seule responsabilité du professeur. L'avancée du savoir s'élabore *conjointement*. Nous sommes amenés à « extraire » temporairement les énoncés du professeur, ceci afin d'observer avec précision les moments d'expression. Mais les énoncés du professeur, répétons-le, ne sont pas destinés à être isolés des énoncés de l'élève temporairement ou définitivement. Nous cherchons à développer un « voir comme » par « une analyse distanciée » des énoncés du professeur. Ensuite, nous souhaiterions confronter l'analyse des énoncés professoraux associés aux énoncés de l'élève, situés dans l'action. Les énoncés du professeur, semble-t-il, prendront un sens « plus complet » en réponse/en écho/par anticipation aux énoncés de l'élève in situ (dans le savoir et dans l'action). La « mise à distance » des énoncés du professeur est donc une tentative de définition de la nature de la notion d'expression. Après une première catégorisation, nous étudierons à nouveau les énoncés du professeur pourvus de ceux de l'élève et situés dans l'action. Nous effectuons le choix de la centration sur la dialectique expression-réticence puisque l'expression et la réticence apparaissent à la fois opposées et complémentaires, l'une ne pouvant vivre sans l'autre.

6.6 Une première catégorisation des énoncés du professeur

6.6.1 Les énoncés en lien avec la gestion du groupe (faire la classe)

Ces énoncés ne concernent pas directement le savoir à construire. Ils sont des moyens de gérer le groupe. Ils sont constitués de rappels tels que les encouragements ou les mises en garde. Ils visent à garder la cohésion du groupe-classe. Ils peuvent également permettre un partage équitable de la parole et de l'écoute. Ils peuvent être en relation avec l'utilisation de matériel nécessaire au déroulement de la leçon. Nous montrons, à l'aide des tours de parole, les différents types d'énoncés évoqués. Nous commençons par les énoncés en relation avec les attitudes.

Tdp 11, P : bravo/allez/super/alors …
Tdp 19, P : non/Christophe/non/on va travailler/et j'veux pas que tu écrives sur la table …

Par ces énoncés, le professeur peut modérer le groupe par une distribution et/ou une organisation de la parole (la circulation et/ou une prise de la parole). De même, il peut gérer l'espace, c'est-à-dire l'occupation de la zone proche du tableau, visible de tous. Cette zone correspond à un « espace géographique de monstration » important dans la classe pour l'enseignement/apprentissage.

Tdp 206, P : mais laissez-le/laissez-lui le temps de corriger/et puis quand on a le nez sur le tableau des fois/alors...
Tdp 224, P : attends/je te donne la parole Christophe/ **Christophe lève le doigt** */ à vos places/* **il y a cinq élèves devant le tableau...**
Tdp 227, P : alors/qu'est-ce que/de ta place qu'est-ce que tu ne prends pas/ de ta place parce que les copains ne voient pas ...

D'autres énoncés, par contre, sont davantage en rapport avec le matériel. Ils ne font pas partie spécifiquement de la situation. Ils appartiennent plutôt au cadre, c'est-à-dire à l'Institution École. Il s'agit du matériel « traditionnel » de l'élève : la trousse, l'ardoise … Ils sont le « quotidien » de l'élève dans la classe. Ils pourraient être regroupés sous le terme : formulation de consignes autour du matériel. En voici quelques exemples :

Tdp 3, P : bon/allez/levez l'ardoise SVP....
Tdp 15, P : vous allez la ranger/et vous allez mettre sur la table un crayon gris/un crayon gris...

Ces énoncés « génériques » appartiennent à la séance. Nous pourrions même dire qu'ils appartiennent à l'histoire de toutes les classes. Ils sont à distinguer des énoncés strictement liés au savoir, formulés par le professeur. Quant à ces derniers, ils déterminent plus particulièrement « l'enquête » du contrat/milieu. Généralement, ce sont des énoncés à forte charge épistémique. Ces énoncés épistémiquement denses sont un sens. Celui-ci est en lien avec l'étude du savoir visé. C'est à partir du sens des énoncés épistémiquement denses que l'élève recherche les indices dans le comportement du professeur et de la situation. Ceux-ci (les indices) sont des pourvoyeurs de « signes ». Ils sont utilisés par l'élève afin de s'orienter dans le paysage didactique (l'arrière-plan spécifique). Les énoncés professoraux orientent alors la sélection des indices pertinents à prélever par l'élève pour une « lecture » adéquate (conforme) de la situation.

6.6.2 Les énoncés en lien avec l'étude/enquête du contrat/milieu

Le professeur cherche à faire faire à l'élève des énoncés pourvoyeurs de sens et à élaborer « des stratégies gagnantes ». Pour cela, il doit aider l'élève à « décoder » les signes du milieu, à prendre des repères parmi les objets sémiotiques :

Tdp 28, P : en trois termes/tu as raison/Isabelle
Tdp 34, P : deux dés/donc le lancer/le lancer/il est avec deux dés/donc vous avez raison/il y a deux termes/alors cette fois-ci ...

Pour le professeur, il s'agit d'aider l'élève à intégrer les contraintes du contrat. Cela est essentiel afin de pouvoir produire des écritures mathématiques « conformes ». Par écriture mathématique conforme, nous entendons que celle-ci (l'écriture) comporte et respecte les contraintes du contrat/milieu : l'annonce est en trois termes et un lancer en deux termes. Ainsi, l'élève sera en capacité de jouer au jeu demandé. Il n'est peut-être pas certain de gagner mais il est assuré de jouer le « bon jeu ».

D'autres énoncés peuvent évoquer un outil au sens d'outil/rapport à un objet mathématique. L'outil appartient *strictement* au savoir. Il « vit » et évolue avec la situation didactique. Bien entendu, l'outil n'est pas de même nature que celui évoqué précédemment. Ce n'est pas un outil/instrument de la trousse de l'élève comme le stylo ou la règle. L'outil/ « objet » constitue la référence pour l'élève et le professeur. Dans la progression ACE, par exemple, il peut s'agir de la ligne graduée. Celle-ci est un outil pour penser les mathématiques puisqu'elle peut servir à établir la preuve et/ou à réfléchir à la structure du problème. Elle est, à la fois, une aide pour parler/dire/écrire le nombre et argumenter. Le tour de parole 181 montre la « convocation » de la référence par le professeur :

Tdp 181, P : bon alors/tiens/on va se servir/chut/a/ttends/ttends/ttends/ttends/la ligne graduée/attends/fais nous un bond de quatre STP

En effet, le professeur constate et assiste à un désaccord sur la somme de l'annonce. Il souhaite obtenir rapidement le règlement de la question du nombre désigné par l'annonce « 4 + 4 + 4 ». C'est pourquoi il propose un outil sémiotique connu de l'élève : l'apport de la ligne graduée en usage dans la classe depuis le début de l'année scolaire. Il pense que la représentation de l'annonce en trois termes par le traçage de trois bonds de quatre sur la ligne graduée pourrait garantir la validation du nombre désigné et constituer ainsi la preuve.

Nous constatons dans la catégorie « étude/enquête du contrat/milieu », l'existence de deux autres sous-catégories d'énoncés. Elles nous semblent intimement liées. L'une des deux catégories est en relation avec le ralentissement ou l'accélération du temps didactique. L'autre catégorie concerne la construction de la certitude. Pour ralentir le temps didactique, le professeur peut faire usage de son corps : par la voix ou le frapper de mains. Il use des expressions comme « pourquoi », « alors » « attends »... Parfois, le professeur réclame des précisons. Il rejette des propositions si besoin ou au contraire, il valide des hypothèses :

Tdp 83, P : **le professeur frappe dans les mains** */alors attendez ...*

Ici, nous constatons que le professeur souhaite vivement marquer un *arrêt*. Pour cela, il use de tous les moyens. Il commence par marquer la rupture dans le temps des savoirs par un frapper de mains. Lorsque celle-ci se produit, le professeur impose à l'élève un rythme « ralenti » et il retient son l'attention avec ces quelques mots « alors attendez... ». Le professeur est, ici, le chronomètre dans cette phase d'enseignement/apprentissage. Maintenant, nous présentons quelques tours de parole qui montrent l'interrogation tenace du professeur :

*Tdp 131, P : pourquoi/***Isabelle lève la main**
Tdp 139, P : pourquoi Isabelle
Tdp 153, P : mais/là
Tdp 155, P : là/c'est pas/alors

Ces quelques énoncés montrent un professeur en quête d'information avec des tours de parole dont le mot introducteur est « pourquoi ». Ils semble indiquer un « déséquilibre » (Tdp 153, mais/là). Le tour de parole 177 montre une demande de précision encore plus explicite de la part du professeur. Celui-ci ne s'engage pas. Il ne précise pas s'il est d'accord ou non. Il y a un problème constitué par un déséquilibre, alors le travail du professeur peut consister à mettre en évidence le déséquilibre ou un élément du déséquilibre. Il demande simplement à comprendre ce qui est en train de se dire/faire/parler/s'écrire :

Tdp 177, P : ha/qu'est-ce que ça veut dire ça

Il existe des positions topogénétiques professorales différentes dans la séance. La position topogénétique occupée précédemment par le professeur change. Elle était plutôt basse puisque le professeur était en retrait avec des énoncés peu denses. Elle devient une position « haute ». Ainsi, dans le Tdp suivant, le professeur choisit d'accélérer le temps didactique. Pour cela, il occupe le devant de la scène didactique. Il affirme qu'il ne « prend pas » cette proposition. Cela signifie qu'il considère la proposition comme une proposition non-valide, répétons-le non-valide dans cette situation. Les deux entités, le professeur et l'élève, occupent alors deux espaces distincts dans le même lieu (la classe). Elles sont symbolisées par deux positions différentes qui représentent deux rapports au savoir, l'un sait et l'autre pas :

Tdp 147, P :alors/je mets 14 + 0/bon/j'dis toujours que je prends pas

Le professeur accepte la responsabilité de celui qui sait. Il affirme qu'il ne « prend » toujours pas cette écriture même avec l'ajout du zéro. Il rejette les propositions de l'élève pour l'amener vers l'élaboration de la certitude raisonnée. Le fait « de ne pas prendre » constitue en même temps une stratégie de réticence et d'expression. De réticence, puisque le professeur ne dit pas les raisons de son refus. D'expression, puisque le professeur parle pour dire son refus. La force perlocutoire de l'énoncé, là, est qu'elle incite l'élève à chercher un nombre que le professeur pourrait prendre. Passons maintenant aux énoncés/usages de la référence :

Tdp 201, P : non, non, non/on a pris la ligne gra/est-ce qu'on a besoin de nos doigts/est-ce qu'on a besoin de nos doigts puisqu'on a la ligne graduée

Tdp 281, P : exactement/alors moi/j'dis ça c'est plus un bond de dix

Puis, il est temps pour le professeur de quitter le devant de la scène. Le professeur n'affirme plus qu'il est le seul à savoir. Maintenant, il occupe une position « basse », il est prêt à « écouter » et à partager. L'élève pense qu'il peut et doit « convaincre » le professeur. L'élève devient un professeur qui apprend et s'apprend à lui-même :

Tdp 250, P : et pourquoi je te croirais
Tdp 252, P : viens nous montrer parce que/moi/je veux bien te croire mais il faut que tu nous prouves

Le professeur redevient un parmi d'autres. Pour cela, il utilise le « on ». Le professeur n'est plus « contre » mais « avec » l'élève. La position topogénétique a de nouveau changé. Les deux espaces se refondent. La classe semble devenir un lieu « unique », occupé par des êtres « tous identiques », cela reste pourtant illusoire.

Tdp 190, P : ha j'ai eu peur/j'ai cru que l'on faisait un bond de cinq/hein

Le professeur rentre « en écoute » avec la classe. Il confirme son appartenance au groupe. Il questionne la classe sur l'élaboration du savoir en cours. L'apprentissage/enseignement est nourri des nombreux échanges.

Tdp 258, P : est-ce que vous êtes d'accord que ce tiret c'est pour dix
Tdp 260, P : est-ce que vous êtes d'accord que Christophe

La classe, par l'unité reformée, se rappelle les faits passés et vécus ensemble lors des anciens contrats. Le professeur favorise la mise en mémoire grâce au rappel.

Tdp 287, P : on avait dit qu'on faisait

De nouveau, nous constatons une accélération du temps didactique mais pour avancer conjointement, le professeur assure l'entente commune. Elle est nécessaire. Il aide à la synthèse

Tdp 315, P : donc là/est-ce que je peux mettre un signe là/est-ce que 13/je prends

Le professeur « parle » mais il se « tait » aussi. La séance est une alternance de réticence et d'expression destinée à « conduire » l'élève sur les chemins du savoir. Les énoncés du professeur « se croisent » et « se tissent » (se mêlent) avec les énoncés de l'élève, ce que nous étudions maintenant.

6.7 La dialectique expression-réticence

Devant chaque acte d'expression du professeur, devant chaque énoncé, on peut donc prendre conscience du fait que cette expression est l'expression de quelque chose et renvoie dialectiquement au fait que le professeur pourrait ne pas s'exprimer d'une part. D'autre part, sans même parler des différentes façons de s'exprimer, qui peuvent aussi renvoyer à des positions topogénétiques différentes, le professeur pourrait aussi dire autre chose.

De ce fait, à chaque moment de la séance, le professeur est devant une alternative face à un comportement d'élève. Cela signifie que l'action est conjointe : le professeur a le choix de taire des choses (mais taire quoi et de quelles manières) face à tel comportement d'élève, dire des choses (mais dire quoi et de quelles manières) et ce « taire » et ce « dire » sont nécessairement liés, entrelacés. Reprenons ensemble les énoncés professoraux épistémologiquement et épistémiquement denses et étudions-les à l'aide de « ce voir comme ».

6.7.1 L'étude du contrat/milieu

Nous sélectionnons un extrait de sept tours de parole qui mettent en jeu une alternance d'énoncés professoraux et d'énoncés d'élèves relatifs aux contraintes de la situation sur la production d'écritures mathématiques. Trois élèves Isabelle, Damien et Anne s'expriment, au sein de ce que nous modélisons comme l'étude du contrat/milieu. Nous décidons d'observer les énoncés d'élèves « entrelacés » avec les énoncés du professeur à partir du « voir comme » de la réticence-expression. Regardons attentivement ce passage :

Tdp 27, E (Isabelle) : en trois termes

Tdp 28, P : en trois termes/tu as raison/Isabelle

Tdp 29, E (Isabelle) : et/heu/et là/deux dés

Tdp 30, E (Damien) : le lancer/le lancer du dé/c'est deux termes

*Tdp 31, P : oui/et le lancer/deux termes/***le professeur tourne le dos aux élèves et écrit au tableau les contraintes de l'annonce et du lancer**

Tdp 32, E (Isabelle) : deux dés

Tdp 33, E (Anne) : lancer/deux dés

Tdp 34, P : deux dés/donc le lancer/le lancer/il est avec deux dés/donc vous avez raison/il y a deux termes.

Dans ce court extrait, nous voyons un professeur qui s'exprime. Observons ce qu'il dit. Tout d'abord, le professeur ne semble rien dire de plus que l'élève ne formule déjà dans les Tdp 27, 29, 30, 32 et 33. Pourtant le professeur choisit de ne pas se taire, alors pourquoi s'exprime-t-il ? Avec le tdp 28, nous entendons le professeur confirmer les propos de l'élève (Isabelle). Il lui signifie qu'elle a raison. En fait, le professeur valide rapidement l'indice prélevé par l'élève. Le professeur pourrait choisir de se taire face au repérage de l'indice pertinent relevé par l'élève puisque celle-ci s'oriente efficacement dans le paysage didactique. Peut-être pourrait-elle, selon l'hypothèse du professeur, engager toute la classe à partir de son « prélèvement d'indices » ? Pour cela, le comportement ou les dires du professeur devront confirmer la pertinence de « la voie choisie », afin de la rendre visible par tous les élèves.

Que semble provoquer l'intervention du professeur ? L'élève, encouragée dans la réussite de la recherche des indices, parle alors de deux dés. Nous constatons des réactions en chaîne. Immédiatement, cela fait réagir un autre élève. Ce dernier précise que le lancer est en deux termes. Il sous-entend la comparaison avec l'annonce en trois termes. Nous notons l'énoncé du professeur, de nature plutôt sibylline : « oui ». Ensuite, il inscrit au tableau les contraintes du lancer constitué de deux termes. Isabelle (notre élève de la première intervention) reprend la parole avec ces mots « deux dés ». Que fait-elle? Par ces deux mots (deux dés), elle relie les énoncés de l'élève Damien et du professeur « deux termes » (la forme symbolique) à la réalité de la situation (les deux nombres obtenus par le lancer de deux dés). Elle fait le lien entre les différents énoncés pour la classe. Nous pourrions dire qu'elle « traduit » les différents énoncés. En fait, dans la conversation didactique, l'élève Isabelle produit majoritairement des opérations de traduction. A son tour, une autre élève (Anne) apporte une précision. Les deux dés sont en rapport avec l'écriture du lancer (Tdp 33). Le professeur laisse l'élève s'exprimer. Ces aller-retour semblent nécessaires pour stabiliser l'étude du contrat/milieu par une réactivation de la mémoire de la situation de jeu. Avec la référence aux dés, l'élève pourrait comprendre et consolider davantage le travail sur les écritures symboliques. L'épisode se referme. L'étude du contrat/milieu n'est pas de jouer avec les dés. Ils sont la référence de la situation vécue précédemment. Celle-ci est envisagée comme une « fondation » nécessaire pour la compréhension des notions mathématiques visées. L'enjeu reste la production d'écritures mathématiques dans le respect des contraintes de la situation. Le professeur use d'expression et par une longue phrase (Tdp 34), il « résume » et ferme l'enquête sur le contrat/milieu des contraintes adéquates.

Le professeur aurait pu choisir de ne pas s'exprimer et d'user de réticence devant le comportement adéquat d'une élève (Isabelle) puisque les indices formulés par celle-ci sont efficacement prélevés et communiqués. Pourtant, la stratégie du professeur est différente. Il commence par de simples encouragements destinés, pense-t-il, à favoriser l'expression de l'élève. L'expression du professeur a un second but : celui de rassurer l'élève de son adhésion. L'adhésion du professeur est une aide « spécifique » pour se repérer dans l'arrière-plan. Il a une « valeur » particulière pour l'élève : l'avis de celui qui sait. Ainsi, même en peu de mots, il apporte une « plus-value » à l'énoncé de l'élève. Ensuite, le professeur émet une autre supposition. La compréhension des indices pertinents sélectionnés par une élève n'est sans doute pas la garantie de la compréhension par tous les élèves, et notamment, des élèves moins avancés. Comment peut-il alors susciter la diffusion/germination des indices pertinents parmi le reste de la classe ? Par ce court extrait de transcription, nous voyons une pratique de professeur très ouverte. Il laisse de l'espace à une parole « libre » et possible de l'élève. Cela se constate par les interventions spontanées de ce dernier. Mais une pratique « ouverte » ne signifie pas une classe sans professeur. Le professeur, comme nous l'avons montré, dit des choses. L'épisode se clos par une position topogénétique haute occupée par le professeur dont l'enjeu est l'avancée du temps didactique dans la production d'écritures mathématiques sous différentes contraintes.

Cet épisode nous semble montrer un élément signifiant de la dialectique de l'expression/réticence. En effet, nous assistons à la diffusion d'une compréhension « spécifique » (une élève nommée Isabelle/le particulier) à une compréhension « générique », à des stades différents (au reste de la classe) des enjeux de la situation. Cela pourrait être représenté par un schéma composé de plusieurs sphères. Elles illustrent des « états de compréhension » à des stades différents.

6.7.2 La dialectique expression-réticence dans l'élaboration et la diffusion du savoir

Nous tentons par ce schéma une représentation de la « cellule de diffusion/germination ». Il s'agit de « matérialiser » une stratégie professorale destinée à favoriser la diffusion des connaissances en cours de construction dans la classe, par le choix d'une modalité de travail spécifique.

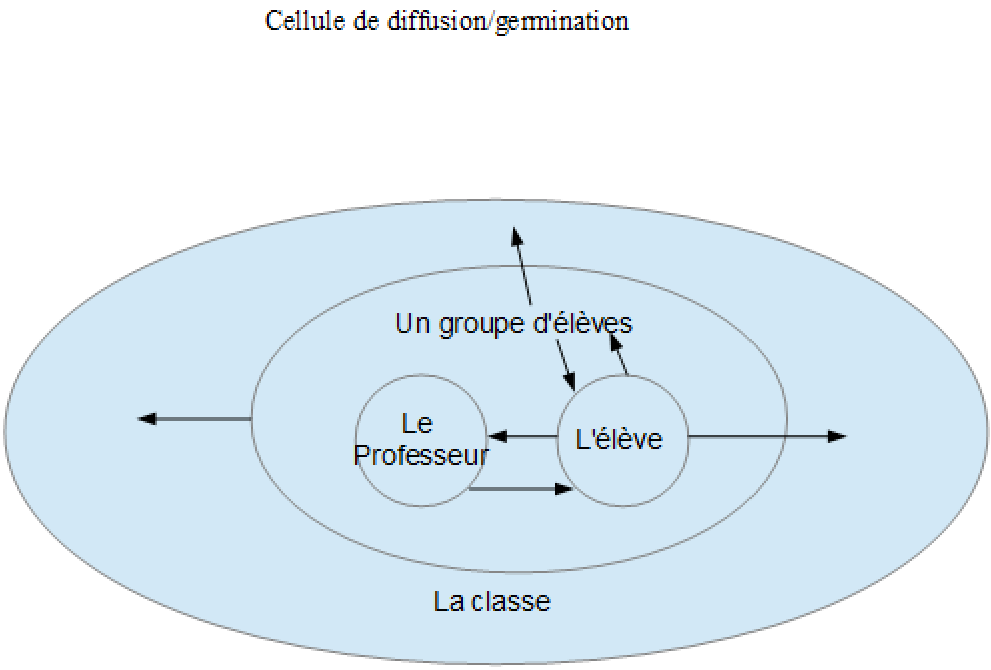


Schéma 1 : une rapide analyse du schéma de la dialectique expression-réticence dans la construction du savoir

Légende : les flèches (   ) indiquent les axes de communication autour du savoir

les flèches montrent les transactions directes

la flèche en pointillée indique les transactions indirectes

Au centre du schéma, les deux petits cercles représentent les instances Professeur et Élève dans le cercle du savoir non symbolisé puisque tous les échanges n'existent que *par et dans* le savoir à construire (pour cet extrait). L'élève parle au professeur et le professeur parle à l'élève. L'instance professeur ne recherche pas un rapport « affectif » avec l'élève. L'action du professeur est orientée vers la diffusion des indices prélevés à partir du rapport spécifique de « l'élève-expression » (l'élève Isabelle) aux objets de savoir. Il tente par cette stratégie de favoriser une germination collective.

La « greffe » semble prendre puisque plusieurs élèves (Damien et Anne) entrent en communication sur ce savoir, à partir de leur propres connaissances et/ou des réminiscences du savoir construit précédemment lors de la dernière situation. Les échanges sont une étude du contrat dans lequel l'élève est amené à produire des écritures mathématiques dans un milieu-problème (avec des contraintes spécifiques). Ce temps organise l'arrière-plan (le paysage didactique) du milieu, propice au « bon déroulement » du jeu demandé par le professeur.

Le professeur validait. Maintenant, il est davantage expressif. Il ne formule pas des éléments autres que ceux présentés par le petit groupe d'élèves. Encore une fois, la stratégie professorale consistait à apporter une « plus-value » aux échanges par sa franche adhésion. De ce fait, il pense créer des conditions favorables au développement de la cellule de diffusion/germination de la compréhension du savoir en construction. En conclusion, l'échange individuel professeur-élève trouve sa justification puisqu'il permet la diffusion des éléments pertinents du milieu-problème dans lequel l'élève doit élaborer des stratégies gagnantes, et la diffusion doit concerner l'ensemble de la classe.

Maintenant, nous centrons la poursuite de notre analyse sur l'élaboration de la certitude raisonnée. Nous sélectionnons des tours de parole en relation avec la recherche du nombre représenté par l'annonce « 4 + 4 + 4 » et l'apport d'un objet sémiotique par le professeur. Il s'agit de la ligne graduée dans la recherche de la somme. Nous situons l'extrait choisi dans l'ensemble de l'épisode de la séance. Un élève, Richard, a écrit au tableau une annonce en trois termes selon les contraintes du milieu. L'annonce proposée est la suivante : « 4 + 4 + 4 ». Afin de jouer adéquatement au jeu demandé par le professeur, l'élève doit maintenant connaître quel est le nombre désigné par l'annonce en trois termes. De cette connaissance (la somme du nombre de l'annonce en trois termes) dépend la possibilité de gagner mais elle n'est pas la seule stratégie qui permette le gain puisque l'élève peut comparer. La situation sur l'inégalité permet précisément une majoration et/ou minoration essentielle en mathématique. Ce savoir est important pour l'élève afin de pouvoir proposer un lancer en deux termes plus petit que l'annonce en trois termes. Il existe un désaccord sur la somme effective de « 4 + 4 + 4 ». Le professeur propose alors d'utiliser la ligne graduée pour construire la certitude raisonnée. Celui-ci n'impose pas la juste réponse. Il préfère utiliser un outil sémiotique pour faire élaborer, argumenter et confirmer le nombre désigné par l'annonce en trois termes. Cela pense-t-il doit se réaliser en appui sur une représentation. Observons les échanges :

Tdp 234, P : ha mais justement/pour l'instant/attends/j'avais dit à Christophe que je lui donnais/pour l'instant/c'est bien le sujet de notre discussion/on n'est pas d'accord/y en a qui propose 12/y en a qui propose 13/y en a qui propose 14/et/ nous n'avons pas prouvé

Tdp 235, E (Isabelle) : ha/je sais/moi

Tdp 236, P : que 4 + 4 + 4 est égale à/

Tdp 237(13mn28), E : je sais comment prouver

Tdp 238, E : 12

Tdp 239, E : plutôt 12

Tdp 240(13mn39), P : alors plutôt 12/oui mais pourquoi/

Tdp 241, E (Damien) : parce que 4/4/ **Damien sort quatre doigts**

*Tpd 242, P : noooon/***rires du professeur***/avec la ligne graduée*

Tdp 243(13mn47), E (Isabelle) : je sais comment/

Tdp 244, P : je ne veux que la ligne graduée aujourd'hui

Tdp 245, E (Isabelle) : je sais comment faire

*Tdp 246, P : alors Christophe/***Christophe lève le doigt**

Tdp 247, E (Christophe) : c'est 12

Tdp 248, E (Christophe) : mais pourqu/oi mais c'est 12

Tdp 249, E (Christophe) : d'ailleurs

Tdp 250, P : et pourquoi je te croirais

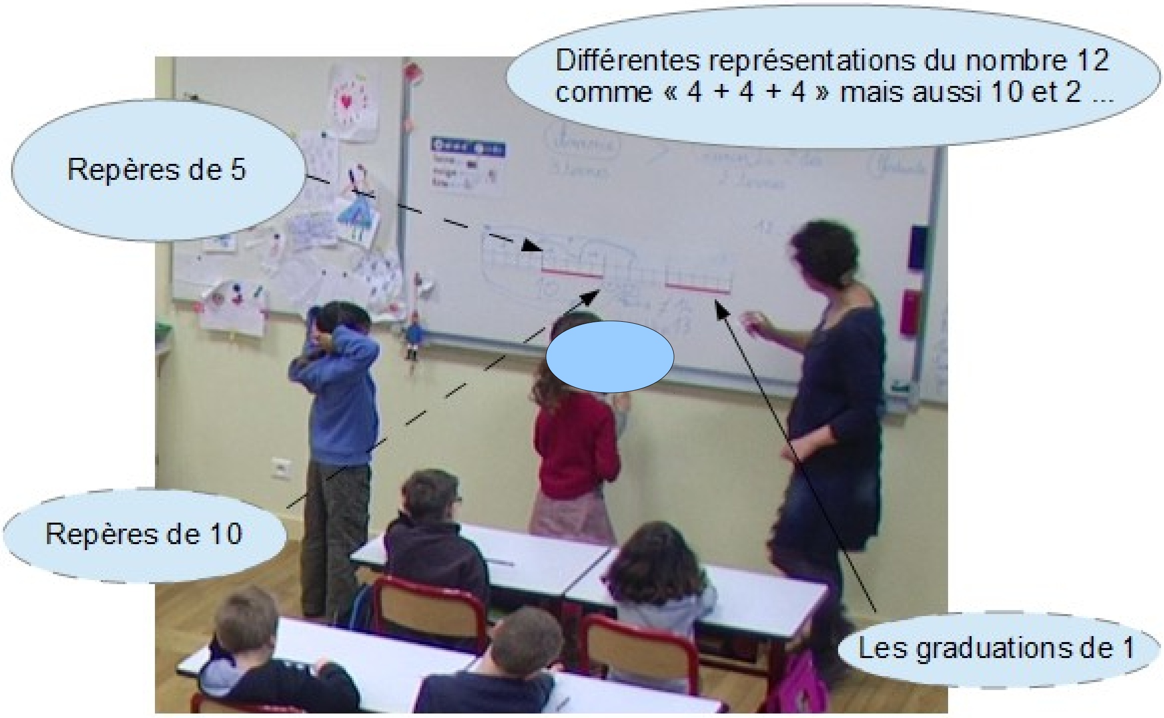
Tdp 251, E (Christophe) : je/je viens de remarquer que ça peut être que 12 parce que c'est heu deux carreaux après/après le tiret de dix

Tdp 252, P : viens nous montrer parce que/moi/je veux bien te croire mais il faut que tu nous prouves

L'élève (Richard) a représenté l'annonce « 4 + 4 + 4 » par trois bonds de quatre sur la ligne graduée. Que nous apprend avec précision cet extrait ? Au Tdp 234, le professeur a fait un rappel sur le désaccord par l'énumération des nombres proposés par les élèves pour la somme de l'annonce en trois termes « 4 + 4 + 4 ». Il cite les nombres 12, 13 et 14. Le professeur pose/repose le problème à toute la classe.

Nous présentons un photogramme de la ligne graduée sur laquelle, l'élève a représenté l'annonce « 4 + 4 + 4 » qui donne à voir, à la fois, une décomposition en trois termes et la somme (le nombre-tout). Pour ce nombre irrégulier « douze », dans lequel le groupe de dix ne s'entend pas, l'outil sémiotique fait correspondre et met en lien cette autre représentation d'un bond de dix plus un bond de deux (10 + 2).

La ligne graduée, outil sémiotique



Photogramme n°43 : le nombre 12 codé différemment sur la ligne graduée

Date, le 5 décembre 2013

Le nombre de l'annonce (la somme) est tracé sur la ligne graduée. Il est représenté par trois bonds de quatre. Il est aussi représenté par un bond « global/total » qui regroupe les trois bonds de quatre. Nous décrivons rapidement l'outil sémiotique, la ligne graduée sur laquelle l'élève a tracé les bonds. Il s'agit d'une ligne horizontale sans numérotation. Toutefois, elle comporte des graduations de 1 en 1. Celles-ci sont indiquées par de petits traits noirs verticaux. Ensuite, il existe des graduations renforcées (le trait est comme épaissi, en gras) afin de permettre l'identification aisément de certains nombres-repères. Les traits sont donc plus marqués à partir de l'origine (non numérotée) et pour les nombres-repères de 5 en 5. D'autres traits sont également plus marqués et plus longs. Ceux-ci correspondent aux nombres-repères de 10 en 10. Cette différence de trait (l'épaisseur et la longueur), pour les nombres-repères de dix, amène souvent l'élève à parler de « tiret ». Il réserve ainsi le mot « trait » pour toutes les autres graduations.

Que semble provoquer chez l'élève la représentation de l'annonce sur la ligne graduée ? Les Tdp 235, 236, 238 et 239 montrent une certaine cohésion autour de la réponse du nombre 12 pour l'annonce. Une élève s'exprime en disant qu'elle sait et affirme au Tdp suivant qu'elle peut prouver.

Tdp 235, E (Isabelle) : ha/je sais/moi

Tdp 237(13mn28), E : je sais comment prouver

Un autre élève de la classe propose alors le nombre 12. Une élève répond comme en écho par « plutôt douze ». Nous ne savons pas ce que signifie exactement ce « plutôt douze ». Fait-il référence à la lecture du tracé des trois bonds de quatre sur la ligne ? Correspond-il à une estimation du grand bond (la somme) ? Est-il une prise de position en rapport au choix proposé par le professeur des trois nombres cités au début de l'extrait ?

Tdp 238, E : 12

Tdp 239, E : plutôt 12

Le Tdp 240 indique le début de l'élaboration de la certitude raisonnée. Ici, l'annonce « 4 + 4 + 4 » désigne le nombre 12. Le professeur commence par la stratégie de l'adhésion (adhésion à la réponse de l'élève) et continue par une demande d'explication/d'argumentation. Il s'agit bien du nombre 12 mais comment obtenir la certitude – sinon, pourquoi pas le nombre 13. Un élève (Damien) cherche à prouver le calcul du nombre 12 avec l'usage des doigts en appui sur les répertoires additifs.

Tdp 241, E (Damien) : parce que 4/4/ **Damien sort quatre doigts**

Le professeur arrête l'élève. Il ne souhaite pas favoriser cette démonstration et il va l'arrêter. La preuve est sur la ligne graduée. Isabelle prend à nouveau la parole pour préciser qu'elle sait prouver mais le professeur choisit un autre élève. Christophe levait la main. La réponse de l'élève, nous semble-t-il, est intéressante. Toute la classe est à la recherche de la preuve pour démontrer que l'annonce « 4 + 4 + 4 » est une désignation du nombre 12. Il est à remarquer que Christophe dit simplement : « c'est 12 ».

Tdp 247, E (Christophe) : c'est 12

Pour contraindre l'élève à expliciter, à démontrer ou même à justifier davantage son calcul, quelle pourrait être la stratégie du professeur ? Il commence par encourager l'élève. Le professeur veut bien croire la réponse de l'élève mais il n'accepte pas l'hésitation (il recherche la certitude). Toute la question repose sur « comment prouver le nombre 12 ? » Là encore, l'échange entre le professeur et l'élève est une stratégie. L'élève avancé (Christophe) doit « contaminer » le reste de la classe. Le professeur ne peut se taire et il use d'expression pour maintenir les transactions sur le savoir (la preuve). Nous pourrions peut-être dire : rendre les transactions « parlantes » pour tous - sinon les éléments de savoir pourraient ne pas se disséminer. Les trois tours de parole suivants (Tdp 249, 250 et 251) apportent des précisions. La réponse de l'élève avancé « c'est 12 » correspond à une évidence pour lui, une certitude qu'il n'interroge pas. Même la demande de preuve du professeur n'a pas entamé sa certitude sur le nombre représenté par « 4 + 4 + 4 ». L'élève sait. Il est certain du nombre désigné sous la forme additive « 4 + 4 + 4 » et c'est 12. Le professeur souhaite que cette certitude essaime. L'élève commence à interroger non pas sa réponse (c'est le nombre 12 et il le sait) mais l'adéquation du nombre 12 et la représentation de la ligne graduée. Il semblerait que ce qui crée un étonnement chez l'élève concerne les deux représentations de douze (la ligne graduée et le calcul de Christophe) bien que différentes et qui pourtant disent la même chose. Christophe est un élève avancé, il pense avec les calculs. Il est dans la symbolisation et il peut utiliser des résultats partiels pour calculer. Une décomposition comme « 4 + 4 + 4 » ne lui pose pas de véritable problème puisque qu'il sait/connait le nombre-recherché (12). Pourtant, il prononce le mot « d'ailleurs » et son visage marque un étonnement. Nous pouvons faire l'hypothèse qu'il s'agit sans doute de l'affichage du double point de vue sur le nombre douze qui alimente cette « curiosité ». Essentiellement, l'étonnement semble provoqué parce que les deux représentations différentes peuvent être lues en même temps sur la ligne graduée et désignées le même nombre.

Tdp 249, E (Christophe) : d'ailleurs

Ce « d'ailleurs » montre un élève interrogatif, il vient de remarquer une chose importante. La stratégie du professeur est de maintenir un niveau de transactions important à partir de la « cellule de contagion » pour essaimer. Le professeur continue d'user d'expression. Il redemande à l'élève : pourquoi devrait-il le croire ?

Tdp 251, E (Christophe) : je/je viens de remarquer que ça peut être que 12 parce que c'est heu deux carreaux après/après le tiret de dix

L'élève confirme qu'il vient de remarquer que le bond de l'annonce (la somme des trois bonds de quatre) est deux carreaux (deux graduations) après le tiret de dix.

Le professeur pourrait face au comportement de l'élève se taire puisque la preuve est enfin affichée et formulée. Pourtant, le professeur parle. Que choisit-il de dire ? La ligne graduée montre le nombre désigné par la somme avec le tracé du « grand bond ». Il semble important que tous les élèves s'accordent sur cet élément.

Tdp 262, P : nous montre que ce tiret/montre-nous encore Christophe parce que je crois que tous les yeux n'étaient pas sur le tableau/

La certitude raisonnée s'élabore peu à peu. Cela se réalise conjointement. Nous notons l'aide de l'élève avancé (les énoncés de Christophe), dans la progression du temps didactique, entrelacée aux énoncés du professeur qui parle beaucoup. Ce dernier entretient les transactions sur le savoir à construire. Il guide l'élève dans l'argumentation. Il communique avec la classe, sur le savoir, par l' « entente » avec un élève. Le professeur recherche l'entente commune à l'aide de l'entente particulière. L'élève va donc reformuler la démonstration/la preuve de la désignation du nombre 12. Il consolide la certitude. Pour cela, le professeur va lui demander de recommencer la démonstration. L'élève avancé, pour qui ce savoir est déjà une certitude, utilise des mots différents à la seconde argumentation. Le Tdp 251 (*12 parce que c'est heu deux carreaux après/après le tiret de dix)* parle de deux carreaux après le nombre 10. Ensuite, l'élève surcompte à partir de dix et énumère les nombres 11 et 12 mais il assure la certitude à la classe, c'est toujours le nombre 12.

Tdp 263, E (Christophe) : ça c'est 10/11/ et 12

Tdp 264(14mn44), E (Isabelle) : ben oui/mais il devrait faire un trait en dessous pour bien montrer que c'est dix/en dessus

Isabelle demande alors un trait en dessous (un bond) pour représenter la quantité de dix parce que 12 c'est deux de plus (deux carreaux ...11/12) après 10. Nous constatons l'entrelacement du langage et des représentations et des signes. L'épisode signifiant a duré deux minutes et la remarque de Isabelle est une « preuve » que « donner à voir la certitude » diffuse dans la classe.

7. BREFS ÉLÉMENTS DE DISCUSSION

Le Journal du Nombre nous semble être un *cahier de réussite* dans le sens où il autorise l'élève à ouvrir un espace dans le temps des apprentissages de la classe (collectif et individuel) pour l'étude/enquête du nombre. Ainsi, l'élève travaille et étudie dans sa durée (il est autorisé/s'autorise à travailler selon sa propre temporalité). C'est aussi un cahier de réussite puisque l'élève produit des mathématiques et mène des enquêtes hors d'une progression non modifiable. L'ordre des objets d'apprentissage n'est pas figé. La progression n'est pas immuable une fois pour toute et intransgressable. De plus, les erreurs individuelles sont à la source d'une réflexion collective sur le nombre et les signes. Elles modifient, ou du moins, elles permettent des retours dans les apprentissages passés par un questionnement réactualisé. Il se distingue donc à la fois d'un cahier de recherche expérimental, d'une part, et d'un fichier classique de mathématiques, d'autre part, dans l'ouverture d'un espace-temps et par le rapport aux objets de recherche (chronologie incluse) parmi lesquels l'élève, grâce à des retours possibles sur/dans les connaissances, élabore une compréhension complexe du nombre et mène des enquêtes dont l'enjeu est un enseignement/apprentissage collectif et individuel par un questionnement permanent et renouvelé du savoir. Nous pensons que cette double « distinction » par rapport à un fichier de mathématiques, certes, mais aussi par rapport à un « cahier de recherche expérimental » s'ancre dans le fait que le Journal du Nombre a vocation à faire étudier/progresser toute la classe puisque les trouvailles des uns deviennent des objets de recherche, des questionnements et/ou des certitudes pour les autres. Le Journal du Nombre est donc un *cahier public*, un objet d'étude. Il témoigne de l'étude/ l'enquête du nombre et des propriétés pour la classe et pour l'élève.

CHAPITRE 4

1.INTRODUCTION SUR LE TRAVAIL DES ÉNONCÉS DE PROBLÈMES

Le travail sur les énoncés de problèmes concerne les années 1 et 2 (l'année 0 étant l'année-test comme nous l'avons précisé). Le point de départ de ce travail sur les énoncés de problème commence avec la constitution de listes mais il s'inscrit dans un ensemble pour la compréhension du Nombre de la recherche ACE. Ce n'est donc pas un domaine à part. Le travail sur les énoncés s'associe essentiellement à deux domaines en particulier. Nous pensons que les énoncés de problèmes produits par les élèves ne pourraient se constituer avec autant de pertinence s'ils étaient décrochés des situations mises en œuvre dans les quatre domaines *Situations, Calcul Mental, Résolution de problèmes et Estimateur.* Toutefois, la production d'énoncés s'est élaborée essentiellement comme nous le soulignons à partir des domaines *Situations et Résolution de problèmes.* Bien évidemment, elle entretient des liens subtils avec les autres domaines à l'oeuvre par les « savoirs que » et « les savoirs comment ». La genèse du travail des énoncés nous permettra de développer comment s'inscrit la production d'énoncés dans les domaines *Situations* et *Résolution de problèmes*. C'est ce que nous allons tenter de montrer dans ce chapitre.

Ce chapitre est constitué autour de la chronologie des énoncés de problèmes avec les listes. Puis il évoque un travail intermédiaire sur les factures pour terminer par la problématique des énoncés de problème réalisés lors de l'année 1.

1.1 La genèse

Pourquoi évoquons-nous les domaines *Situation* et *Résolution de problèmes* de la recherche ACE dans le travail sur les énoncés de problèmes, même si nous le répétons, nous pensons que les élèves écrivent des énoncés de problèmes pertinents, sans doute, en relation avec la construction du nombre autour des compositions et décompositions ?

Nous précisons que le travail sur les énoncés de problèmes ne concerne pas simplement la résolution de problèmes. Dans ce travail, il s'agit bien de mettre l'élève en capacité d'être le propre producteur de ses énoncés mathématiques. Qu'entendons-nous exactement par « être en capacité de ... » pour des élèves de cours préparatoire ? C'est que ce que nous allons expliciter mais, auparavant nous évoquons les liens spécifiques de ce travail avec les deux domaines *Situation et Résolution de problèmes*.

Dans le domaine *Situation,* l'élève explore un milieu-problème. Il résout des questions mathématiques par la rencontre d'une situation et d'un milieu-problème, par exemple avec le jeu des annonces « Dé et doigts » (situation répétitive sur l'année avec des contraintes différentes et évolutives). L'élève est placé en situation de résoudre des problèmes mais ceci de manière informelle puisque si l'élève veut jouer, il doit alors « apprendre de lui-même » à rechercher les moyens de gagner. En fait, la situation crée et organise la rencontre entre un élève et des questions-problèmes à l'intérieur d'un milieu-problème dans lequel l'élève peut/doit agir. Il éprouve donc la nécessité de résoudre les problèmes dans le but de gagner au jeu.

Dans le domaine *Résolution de problèmes*, l'élève va être peu à peu « guidé » à solutionner de petits problèmes de trains, de fruits ou d'immeubles. Ce sont des problèmes de nombre-complément ou de nombre-tout (somme). Ici, l'enjeu est davantage une première confrontation avec une tentative de catégorisation des typologies de problèmes. Ensuite, elles sont associées à des procédés de résolution avec l'aide d'outils sémiotiques. En fait, il s'agit d'énoncés de problèmes de type « scolaire ». Nous donnons trois exemples de tels problèmes (problème A, B et C) tirés de la partie « Résolution de problèmes » de la progression ACE.

Problème A	Le train bleu a 13 wagons. Le train rouge a 5 wagons de plus. Combien de wagons a le train rouge ?
Problème B	Pierre habite au 6 ième étage. Léa habite 5 étages au-dessus. Où habite Léa ?
Problème C	Marie a 13 pommes. Jérémy a 6 pommes de moins que Marie. Combien de pommes a Jérémy ?

Les deux domaines se complètent puisque le domaine *Situation* favorise l'émergence et l'exploration des différentes stratégies produites par l'élève dont l'enjeu est l'élaboration de différents procédés, toujours pour résoudre des problèmes rencontrés. Tandis que le domaine *Résolution de problème* cherche, quant à lui, à différencier, adapter puis à sérier les stratégies en fonction du type de problèmes à résoudre (la catégorie). La catégorie de problème étant identifiée par une pratique régulière, elle semble désigner à l'élève l'enjeu de la recherche (le problème). Puisque l'enjeu du problème est connu/identifié par l'élève, il lui reste à mettre en correspondance la stratégie la plus performante pour résoudre le problème en relation navec la catégorie de problème.

1.1.1 L'élève de cours préparatoire et la production d'énoncés

L'élève de cours préparatoire est un apprenti-lecteur. Cela signifie un apprenti-producteur de texte et un producteur potentiel d'énoncés mathématiques. Dans ce chapitre, nous montrons des travaux d'élèves réalisés lors des années 1 et 2 sur ce travail spécifique (la production d'énoncés). Dans la classe, l'organisation conceptuelle est à penser et organiser afin de promouvoir les capacités des élèves à écrire des énoncés mathématiques. Un élève qui apprend à lire peut écrire des énoncés de problèmes pour lui et les autres élèves de la classe. Cela demande toutefois un aménagement spécifique. Nous retraçons les différentes phases qui ont amené les élèves à produire des énoncés de mathématiques dans la classe sur un temps long (une année scolaire).

1.2 La chronologie de la production d'énoncés de problèmes

Durant le premier trimestre, l'élève expérimente les petits nombres à travers différentes contraintes dans la situation du jeu des annonces « Dé et doigts ». Il explore les nombres ≤ 6. Il résout des problèmes puisqu'il recherche, par exemple : comment faire six avec les deux mains. Puis, il réalise le module *Différence*. Il s'agit, à partir de la comparaison de deux annonces, de percevoir et de calculer le nombre-écart à ajouter à l'annonce la plus petite et/ou le nombre de plus à l'annonce la plus grande pour obtenir deux collections/deux nombres équipotents. En parallèle, le module Résolution de problèmes commence une *imprégnation visant la catégorisation* des types de problèmes avec des énoncés comme : « un train a 4 wagons. On ajoute 2 wagons. Combien en a-t-il en tout ? » mais aussi « un train a 3 wagons au départ de Rennes. Lorsqu'il arrive à Paris, le train a 5 wagons. Combien a-t-on ajouté de wagons ? ». C'est à la suite de ce travail en *Résolution de problèmes* que démarre dans la classe un travail sur les listes qui va amener à la production d'énoncés mathématiques.

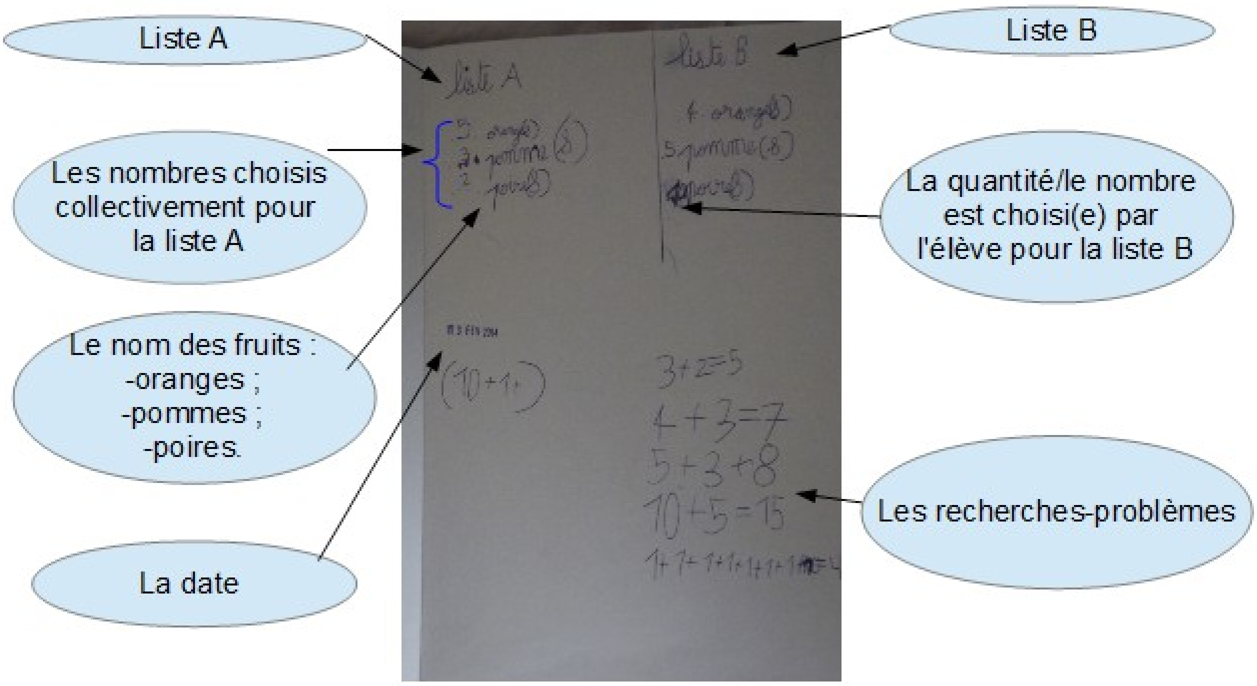
1.2.1 Les listes

Il s'agit d'un premier travail à partir de listes de fruits et légumes dans le Journal du Nombre. La classe, sous l'incitation du professeur, décide de créer deux listes A et B à partir desquelles l'élève produit des calculs qu'il résout. Les élèves ont été confronté à la comparaison dès le début de la recherche ACE, par exemple avec la situation des trains pour connaître le train le plus long. Également entre deux annonces, l'élève a déterminé qui a le plus ou le moins par la comparaison. La comparaison est ainsi un prodédé fréquemment mis en œuvre dans les modules des différents domaines.

Le professeur et la classe sélectionnent ensemble une catégorie d'objets. Ce sera la catégorie des fruits et des légumes. Ensuite, l'élève partage la page du journal du nombre en deux. Il note dans la colonne de gauche « liste A » et dans la colonne de droite « liste B ». Maintenant, la classe décide des objets contenus dans les listes A et B. Les objets seront identiques dans les deux listes. Ceci permet d'expérimenter à nouveau les procédés découverts et mis en œuvre dans les modules *Situations* et *Résolution de problèmes*. Après accord, le professeur écrit le nom de l'objet dans les listes A et B, l'élève fait de même dans son Journal du Nombre. La classe décide, ensuite de la quantité de fruits et/ou de légumes pour la liste A (pour le premier objet, ici, les oranges). Puis chaque élève ajoute librement la quantité, c'est-à-dire le nombre d'objets présents dans la liste B (pour le premier objet, ici, les oranges). Puis, c'est le tour du second objet choisi conjointement, les pommes. La classe décide ensemble du nombre pour la liste A puis c''est l'élève qui choisit le nombre qu'il désire noter pour chaque objet de la liste B, avec le même procédé pour le dernier objet. Le professeur impose toutefois une contrainte. Les nombres choisis pour les listes ne pourront être supérieurs à 20 (les nombres possibles sont donc compris entre 0 et 20 pour les premières listes).

Nous présentons deux productions d'élèves dont les listes A sont identiques puisqu'elles sont élaborées conjointement. Elles comprennent, toutes les deux, 5 oranges, 2 pommes et 3 poires. La liste B diffère dans les nombres inscrits pour les quantités par l'élève (les objets sont les mêmes que pour la liste A avec les oranges, les pommes et les poires). Par exemple, la liste de B de Joseph contient 4 oranges, 5 pommes et 10 poires. La liste B de André comprend 10 oranges, 8 pommes et 10 poires. Les listes A et B de ces deux élèves sont donc partiellement différentes puisque les listes A sont communes avec des listes B différentes. Ce point est important puisque les calculs effectués par l'élève devront être mis en relation avec les listes A et B pour lui mais pour la classe également. Les calculs devront donc s'inscrire dans chaque histoire « particulière » notée dans le Journal du Nombre. Comme les calculs sont différents, la classe va être contrainte de chercher à quelle recherche correspond le problème-calcul. Il s'agit d'établir la correspondance de l'écriture du calcul avec l'histoire du problème qu'il raconte.

La création de la première liste de fruits (Journal du Nombre de

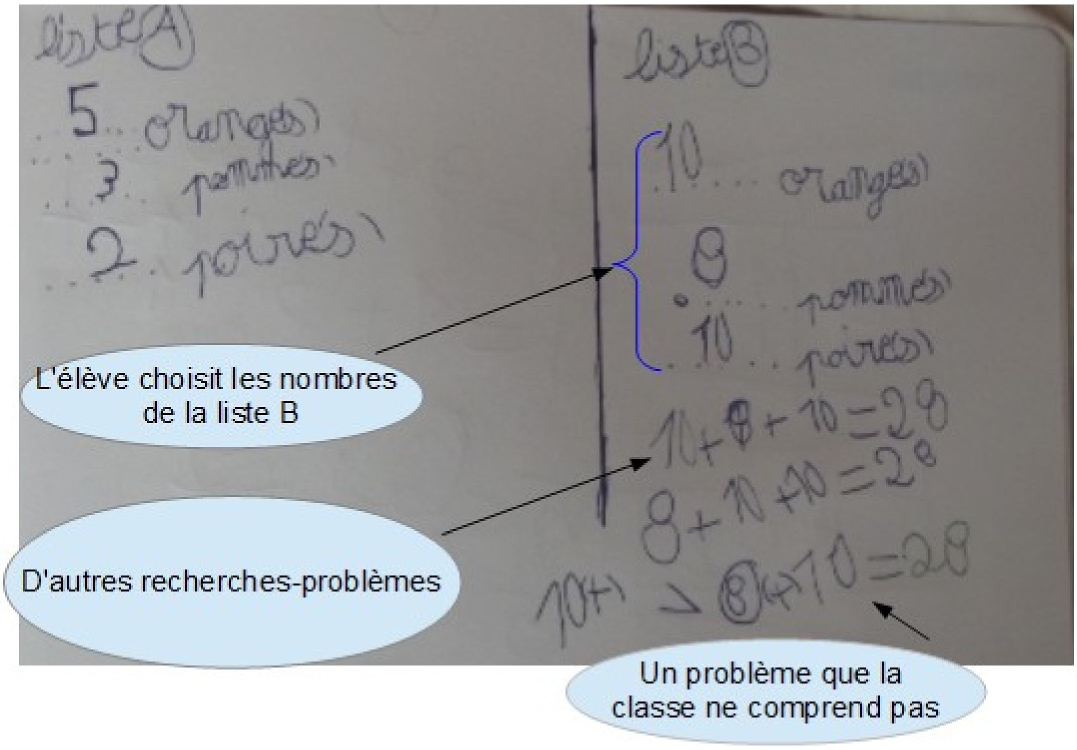


Photographie n°44 : le Journal du Nombre de Joseph

Date, février 2014

L'élève produit cinq calculs avec les nombres des listes A et B. Au début, la classe recherchait simplement si les calculs étaient vrais. Par exemple, un élève disait : « je prends parce que 3 + 2 = 5, c'est vrai ». Un autre répondait : « par contre, moi, je ne prends pas 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4 parce que ce n'est pas vrai ». Un autre élève répondait : « il n'y a même pas de 1 dans les listes, alors c'est pas vrai ». En fait, il s'agit sans doute du nombre 7 formé à l'envers. C'est une hypothèse mais généralement, l'élève (Joseph) trace le nombre 4 « fermé ». A la suite de ces échanges, le professeur demandait ce que raconte précisément le calcul. L'auteur du calcul expliquait alors qu'il avait calculé ensemble les pommes et les poires de la liste A. C'était donc l'histoire du nombre de pommes et poires de la liste A (sans les oranges). Ensuite, la classe recherchait les histoires corespondantes aux autres calculs, par exemple, pour le calcul 5 + 3 = 8. Il s'agit de la recherche du nombre de pommes en tout (le nombre total des pommes des listes A et B). Sur la production, l'élève a noté 5 + 3 + 8. Le second signe « + » (celui avant le nombre 8) est à remplacer par le signe « = ». Ce travail semblait nécessaire pour lier les listes et les calculs puis les calculs aux histoires racontées par les calculs.

La première liste de fruits par un autre élève (Journal du Nombre de Yaouenn)



Photographie n°45 : le Journal du Nombre de André

Date, février 2014

La seconde production montre le travail d'un élève qui réalise les calculs à partir uniquement de la liste B. Il code la liste B avec les écritures additives 10 + 8 + 10 = 28 et 8 + 10 + 10 = 28. C'est l'histoire du nombre total de fruits (de tous les fruits) contenus dans la liste B. L'élève semble réinvestir un « savoir que » et un « savoir comment » dans la recherche de problèmes à partir des listes. En effet, la première écriture additive ajoute les nombres selon l'ordre de la liste B (10 oranges + 8 pommes + 10 poires). Pour la seconde écriture additive, l'élève écrit le nombre de pommes (8) et regroupe côte à côte les deux dix (10 + 10). Il semble que le répertoire additif (10 + 10 = 20) connu et mémorisé, amène à penser le problème comme 8 + 20 ou peut-être bien 20 + 8, et le calcul de la somme 28.

1.2.2 Le questionnement des élèves sur la constitution même des listes

Lors de ce travail sur la constitution de listes, des élèves sollicitent le professeur pour des informations complémentaires. Voici une liste de questions non exhaustive : « Le zéro peut-il être utilisé dans les listes ? « Peut-on utiliser deux fois le même nombre dans la liste ? » « Un même nombre peut-il être écrire plusieurs fois et pour un même objet (dans la liste A et dans la liste B) ? A chaque fois, le professeur ne répond pas mais il renvoie directement la question de l'élève au groupe-classe. Le professeur cherche à construire une référence, une habitude commune de constitution des listes. Il a explicité le choix de « bloquer » les nombres à 20, sous la sollicitation de quelques élèves qui désiraient utiliser de très grands nombres. Le professeur argumente que les listes ne peuvent comprendre de grands nombres puisque celles-ci ne sont pas des listes pour la gestion de magasin.

1.2.3 La naissance des questions

Puisque certains calculs ne sont pas en adéquation avec les listes, la classe décide de rechercher à l'oral les questions à envisager à partir des listes A et B. Cela entraîne une interrogation massive chez certains élèves : « c'est quoi une question ». En fait, la classe va s'interroger sur ce que représente une question. Les différents exemples proposés par les élèves comme « comment tu t'appelles ? », « Est-ce que tu veux un bonbon ? », « quel âge as-tu ? », « Où habites-tu ? » « Combien de gâteaux as-tu ? » apportent des informations sur les différentes questions possibles. Ensuite, la classe, toujours sur le temps de l'incitation productive collective, recherche et formule des questions *génériques* (puisque les élèves n'ont pas les mêmes nombres). Ils s'interrogent sur ce qu'ils peuvent rechercher à partir des listes A et B crées. Ces questions sont soumises à la discussion lors de ce temps (l'incitation productive collective). Par exemple, les élèves n'ont pas le même nombre de tomates mais tous les élèves possèdent l'objet « tomate » écrit dans les listes dans le Journal du Nombre. Il est alors possible de questionner combien il y a des tomates dans les listes A et B ou combien il y a de tomates en plus ou en moins dans une des listes mais également combien les listes comprennent de fruits ou de légumes en tout. L'incitation productive collective n'est pas forcément un temps de calcul écrit puisque chaque Journal du Nombre peut/doit être différent par les quantités. C'est un temps consacré à la recherche de problèmes *à l'oral et de problèmes génériques*. Généralement, les élèves comparent les objets de la liste A et les objets de la liste B. Ils réalisent des calculs sur les objets de la liste A et d'autres calculs à partir des objets de la liste B. Aussi, il est facile pour le professeur de demander à quoi sert la présence de deux listes. Ensuite, la comparaison semble se déplacer d'un objet de la liste A vers un objet de la liste B, mais le calcul ne procède pas forcément sur la catégorie (par exemple, l'élève compare le nombre de tomates de la liste A avec le nombre de radis de la liste B. Par exemple, cela permet de connaître qu'il y a plus radis que de tomates et de combien...). Souvent, la comparaison s'effectue sur deux objets uniquement. La somme des objets de la liste A et celle de la liste B interviennent plus tard. Encore plus tardivement, la comparaison des deux nombres-sommes (la somme de chaque liste).

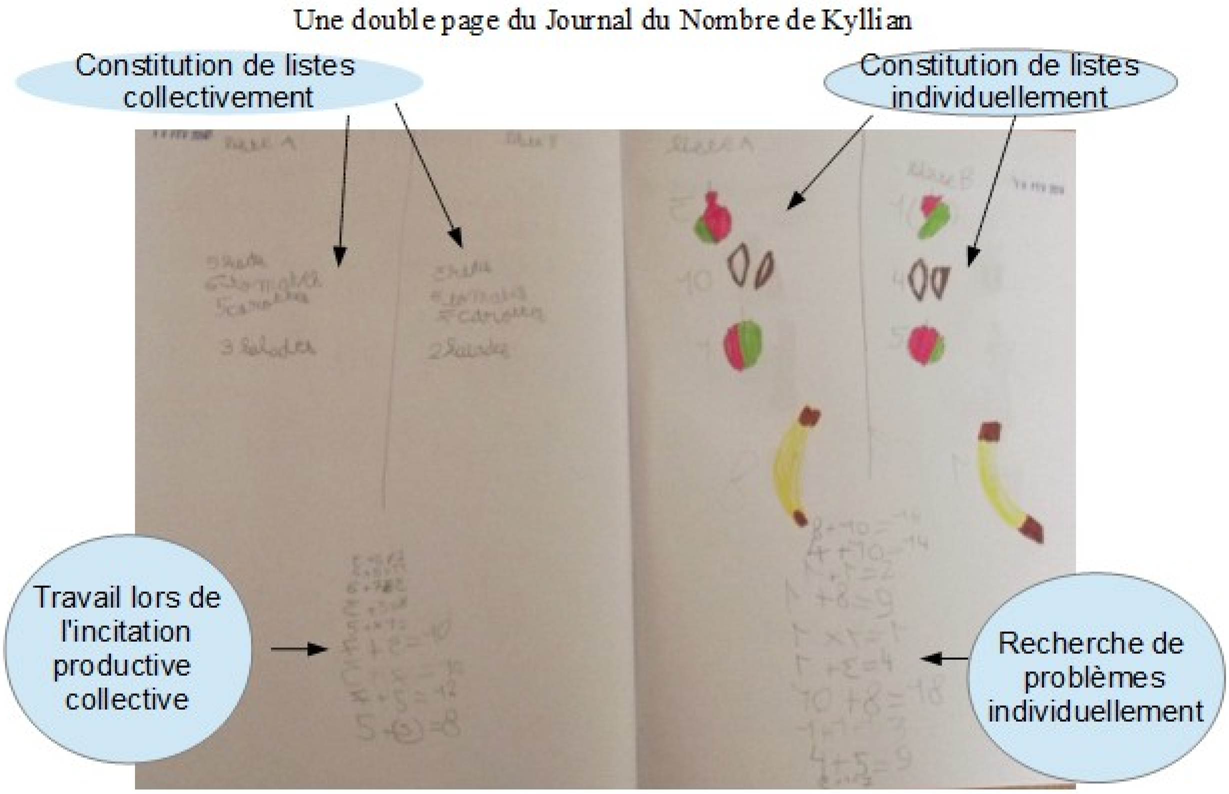
1.2.4 Le retour sur les calculs

Mais bien avant tout cela, la classe observe les productions dans le Journal du Nombre. Un élève place sa production sous le visualiseur et lit/explique les calculs effectués. La classe discute si elle « prend ou ne prend pas » les calculs/problèmes. Très souvent, les élèves valident si le calcul est vrai. La classe, les élèves et le professeur cherchent alors à relier les calculs/problèmes à l'histoire racontée. Ils recherchent, à l'aide des listes, quelle peut être l'histoire mathématique racontée par le calcul. Parfois, le calcul est vrai mais l'histoire n'existe pas. Parfois, le calcul est erroné mais l'histoire existe ou encore un même calcul raconte plusieurs histoires. Les élèves tentent de coordonner les calculs avec les listes (les histoires des calculs).

1.2.5 Une double-page de deux Journaux du Nombre

Nous allons à l'aide de la comparaison de deux doubles pages, travail réalisé sur les listes dans le Journal du Nombre, expliciter et développer davantage notre propos. Les productions qui suivent sont la poursuite du travail sur la constitution de listes. Maintenant, les élèves sont rodés à l'élaboration de listes, de plus, ils comprennent l'enjeu du travail. Les noms des objets contenus dans les listes sont encore négociés lors de l'incitation productive collective mais l'élève, dans cette phase choisit les nombres pour la liste B mais également pour la liste A. Bientôt, l'élève sera complètement autonome. Il sélectionnera lui-même les objets de la catégorie décidée colletivement. Nous montrons les double-pages que nous fragmentons ensuite pour les besoins de l'explicitation.

Le Journal du Nombre de Damien



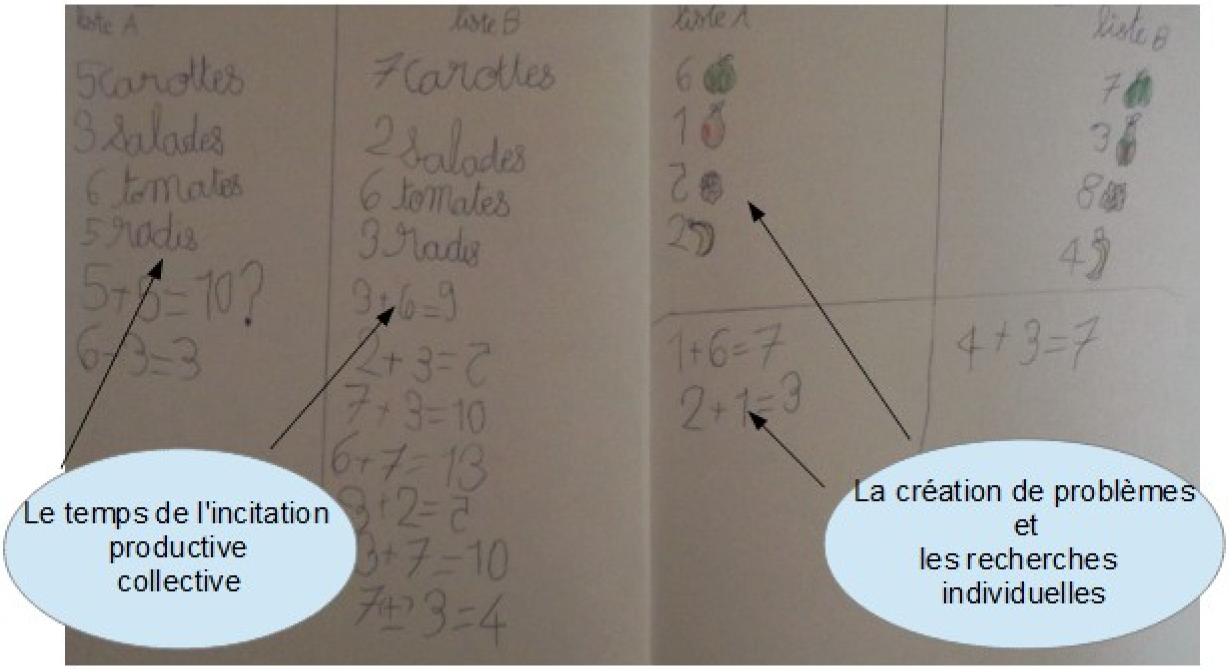
Photographie n°46 : les fruits et les légumes (auteur Damien)

Date, le 19 février 2014

1.2.6 Le cadrage de la constitution des listes

La double page de chaque Journal du Nombre (Celui de Isabelle ci-dessus et celui de Damien ci-dessous) montre sur la page de gauche un travail semi-collectif issu de l'incitation productive collectif. La catégorie d'objet est choisie collectivement mais les calculs/problèmes sont individuels puisqu'ils sont liés aux listes A et B propres à l'élève pour les quantités. Ce sont ces calculs/problèmes qui nourrissent un débat collectif. Ce temps permet de travailler le contrat et place l'élève en position de connaisseur de l'enjeu du jeu spécifique demandé par le professeur. Il peut ensuite, sans la garantie de gagner, apprendre à jouer. La page de droite de chaque Journal du Nombre (Isabelle et Damien) correspond à cette recherche. L'élève recrée deux listes A et B. Pour ne pas être pénalisé par l'écriture des noms des objets, il représente/dessine les fruits et les légumes. Nous montrons dans le chapitre 4 différents procédés (listes de mots, tampons …) pour la constitution de listes puis nous sélectionnerons quelques énoncés de problèmes réalisés par les élèves.

Le Journal du Nombre, l'incitation productive collective et les problèmes,
à partir de deux listes A et B



Photographie n°47 : les fruits et les légumes (auteur Isabelle)

Dates, le 19 février 2014 et 20 février 2014

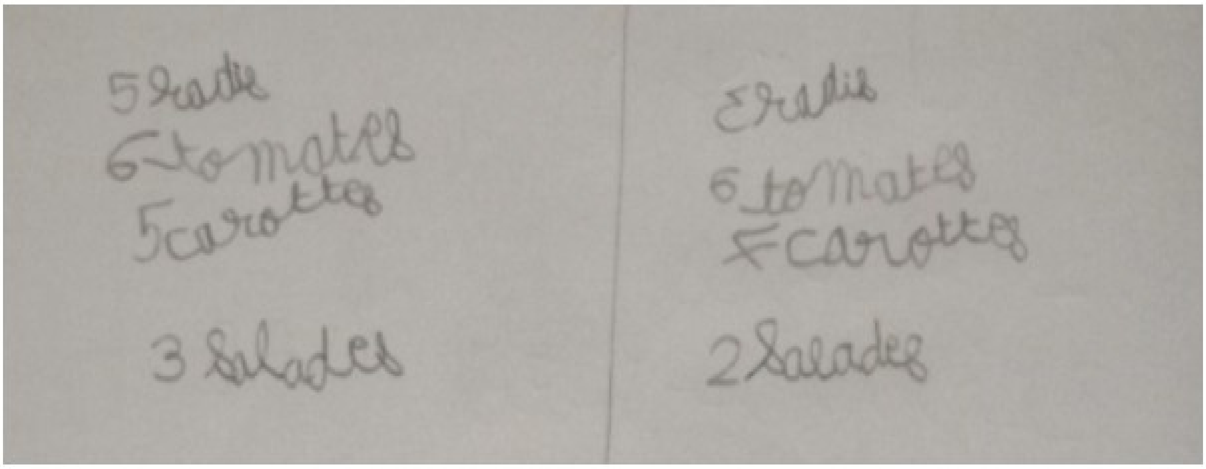
1.3 La spécificité de chaque Journal du Nombre

Nous entamons la comparaison des deux productions d'élèves. Pour cela, nous commençons par le Journal du Nombre de Isabelle avec une partition de la reproduction des pages déjà exposées en trois morceaux. Le premier morceau correspond aux listes A et B lors du temps de l'incitation productive collective avec les nombres des listes A et B choisis par l'élève (Isabelle). Le second morceau montre les différents calculs effectués à partir des deux listes A et B puis débattus collectivement (trois ou quatre Journaux font l'objet d'un débat par séance). Le dernier morceau centre l'attention des lecteurs sur les listes entièrement personnelles réalisées par l'élève (Isabelle) à partir des dessins de fruits.

1.3.1 Isabelle : une élève dans le contrat

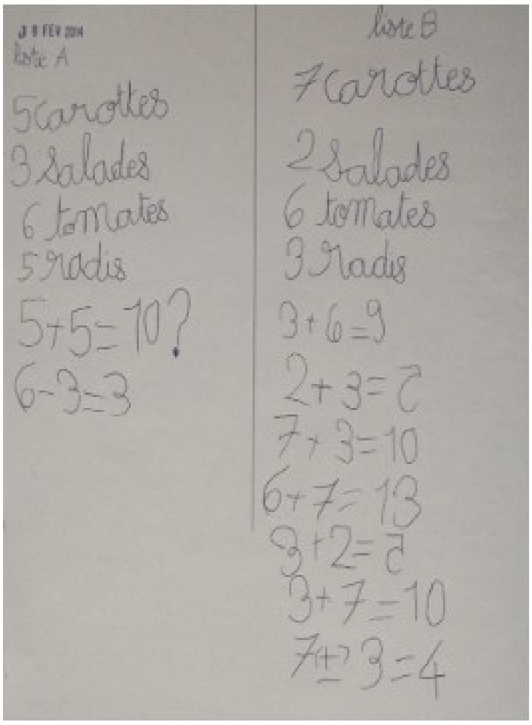
Nous montrons les premières listes A et B constituées collectivement (le nom des objets). Cet extrait est un agrandissement de la double page sélectionnée précédemment. L'élève a recopié les mots écrits sur le tableau par le professeur. Puis, l'élève a inscrit des nombres devant chaque nom de fruits ou de légumes. Les nombres choisis sont compris entre 2 et 7. L'élève a noté deux fois le nombre 5 dans la même liste (liste A). Le nombre de carottes est, quant à lui, identique pour les deux listes (listes A et B). Presque tous les nombres de la liste B sont supérieurs (de plus un ou plus deux) par rapport à la liste A, sauf les tomates et les salades. Le nombre de salades est plus grand de un dans la liste A. Le tracé des nombres 3 et 7 est à l'envers dans la liste B alors que la norme du tracé (le nombre 3) est normé dans la liste A (même production/même jour). Voici les agrandissements de la photographie n°2 du Journal du Nombre de Isabelle.

Les listes et l'incitation productive

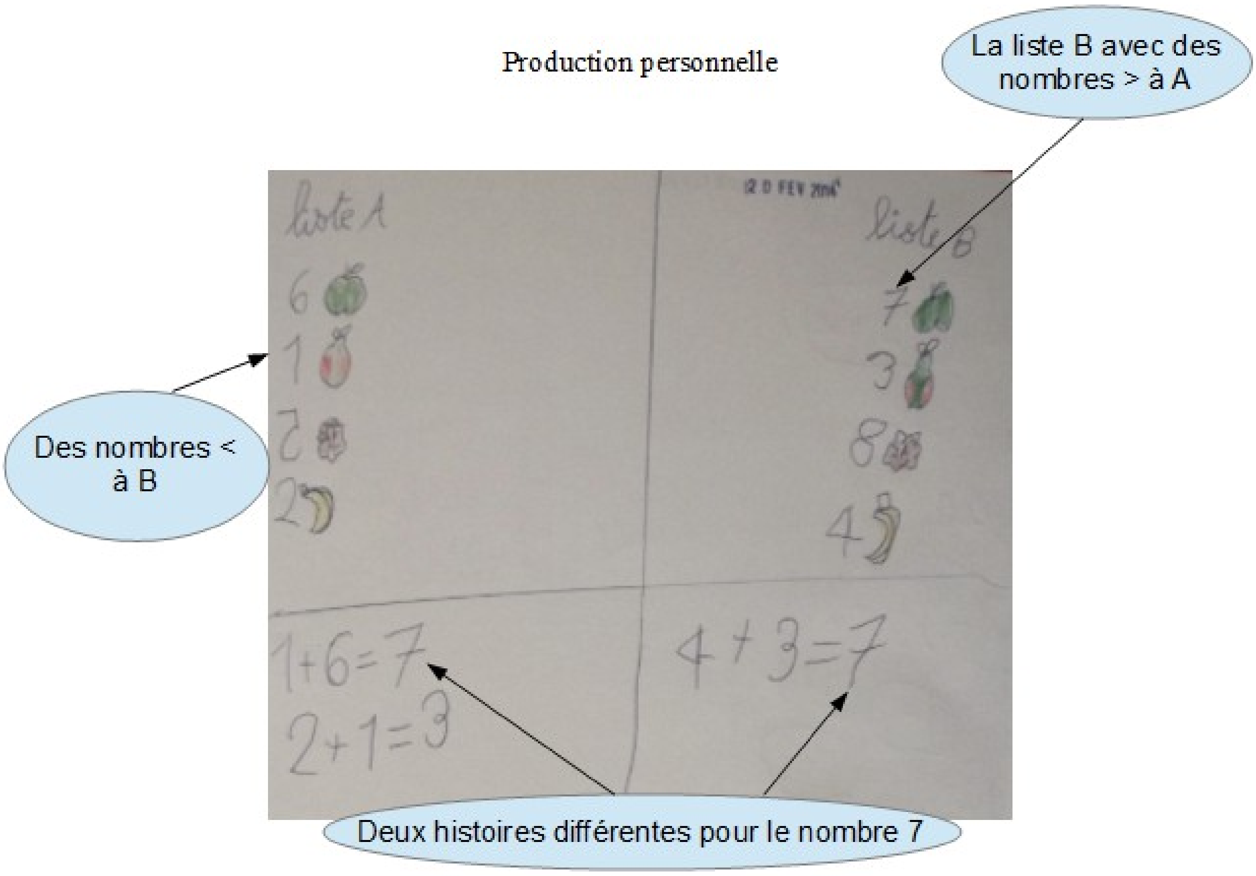


Nous pouvons décrire Isabelle comme une élève avancée qui s'exprime très souvent. Elle prend régulièrement la parole dans le grand groupe. Elle intervient très souvent pour ralentir le temps didactique lorsqu'elle pense ne pas avoir compris afin d'obtenir des informations complémentaires. Elle participe également activement lors des débats dans l'élaboration des connaissances. Le choix des petits nombres pour les deux listes A et B assure à l'élève (Isabelle) le gain au jeu demandé. La production montre un choix restreint avec des nombres ≤ 7. Nous voyons deux nombres 6, deux nombres 5, deux nombres 3, un nombre 2 et un nombre 7. Les deux nombres 6 sont placés chacun dans une liste et pour le même objet (les tomates). Par contre, les deux nombres 5 appartiennent tous les deux à la liste A (pour deux objets différents, les radis et les carottes). L'élève joue le jeu demandé par le professeur, aucun des nombres n'est supérieur à vingt. Nous dirions qu'elle fait mieux que cela, elle assure le gain par des calculs dont les décompositions additives sont mémorisées. Regardons ce qui se passe dans les calculs-problèmes.

Les calculs et l'incitation productive collective



Ci-dessus, nous observons que les calculs problèmes s'organisent sous les deux listes. Il existe donc deux listes de calculs/problèmes : les problèmes de la liste A et les problèmes de la liste B. Cette dernière (la liste B) génère sept calculs/problèmes tandis que la liste A produit seulement deux calculs/problèmes. Nous remarquons que chaque liste comprend un problème avec l'utilisation du signe « - » (7 - 3 = 4 liste B et 6 – 3 = 3 liste A). Les calculs « soustraction/différence » sont donc spontanément présents même s'ils sont en nombre limité. Nous notons un fait plus curieux, parce qu'il s'agit d'une élève avancée. Isabelle ne semble pas être certaine du résultat du calcul du double 5 + 5 = 10 (les dix doigts des deux mains) puisqu'elle y adjoint le point d'interrogation (?) à la fin de l'écriture. Mais après réflexion, nous précisons qu'il s'agit de l'élève qui a demandé si le même nombre pouvait être deux fois dans la même liste. Nous pensons que ce n'est pas la connaissance (5 + 5 = 10) qui perturbe cette élève mais le respect du contrat (peut-on faire cela, calculer un problème avec deux nombres identiques puisque cela semble peut-être trop facile avec 5 + 5 ?). En revanche, la notion de commutativité continue de s'élaborer puisque nous voyons dans la liste B, 2 + 3 = 5 et 3 + 2 = 5 (repère du groupement à 5) et 7 + 3 = 10 et 3 + 7 = 10 (repère du groupement à 10). Nous constatons aussi un calcul/problème dont la somme est supérieure au nombre dix (6 + 7 = 13, liste B). Tous les calculs sont vrais. Maintenant, nous analysons rapidement la production de la même élève. Les travaux (sur la page de droite du Journal du Nombre) sont totalement personnels puisqu'il ne font pas suite au temps de l'incitation productive collective. Les listes de la page de droite sont réalisées le lendemain (séance suivante) puisque l'élève (Isabelle) fait partie du groupe d'anticipation.



Photographie n° 48 : extrait Isabelle (Listes personnelles)

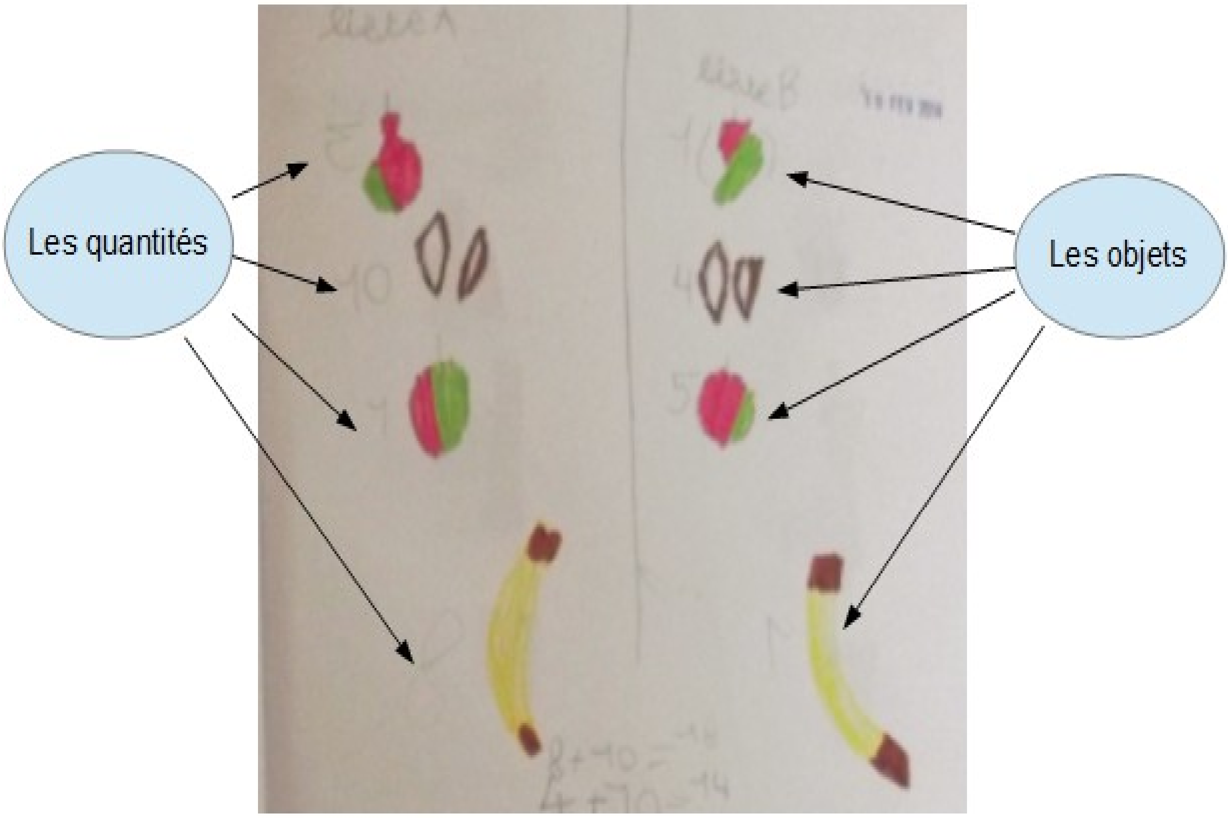
Date, le 20 février 2014

Les nombres de la liste B sont tous supérieurs aux nombres de la liste A (7 > 6, 3 > 1, 8 > 5, 4 > 2) La différence est de 1 à 3 de plus pour les nombres présents dans la liste B. Il existe toujours deux listes de calculs/problèmes mais les écritures produites sont moins importantes que lors de l'incitation productive collective. Le total des écritures produites lors de l'incitation productive collective était égal à 9. Pour ce travail, le nombre de problèmes s'élève à 3. Nous remarquons que tous les calculs sont vrais et en relation avec les listes. L'élève gagne. Nous soulignons l'histoire du nombre 7 (la recherche-problème) dans les deux listes codée par deux décompositions différentes (1 + 6 = 7 liste A et 3 + 4 = 7 liste B). L'élève gagne indéniablement et pour gagner, elle joue avec les nombres qu'elle maîtrise. Sa production montre deux listes A et B et deux listes de calculs-problèmes. Les zones sont identifiées par des cases (la page est séparée en quatre, les deux cases du haut sont les listes et les deux cases du bas sont les calculs-problèmes). Le travail contient peu de calculs-problèmes mais ce qui est écrit semble une certitude. L'élève effectue le jeu demandé par le professeur.

1.3.2 Damien : un élève plus autonome

Voici maintenant le travail de Damien qui n'appartient pas au groupe d'anticipation. La double-page est donc réalisée le même jour (19 février 2014). L'extrait présenté ci-dessous, montre la constitution des listes avec les objets représentés (le dessin du fruit) et la quantité (le nombre) associée à chaque objet.

La création de listes de fruits



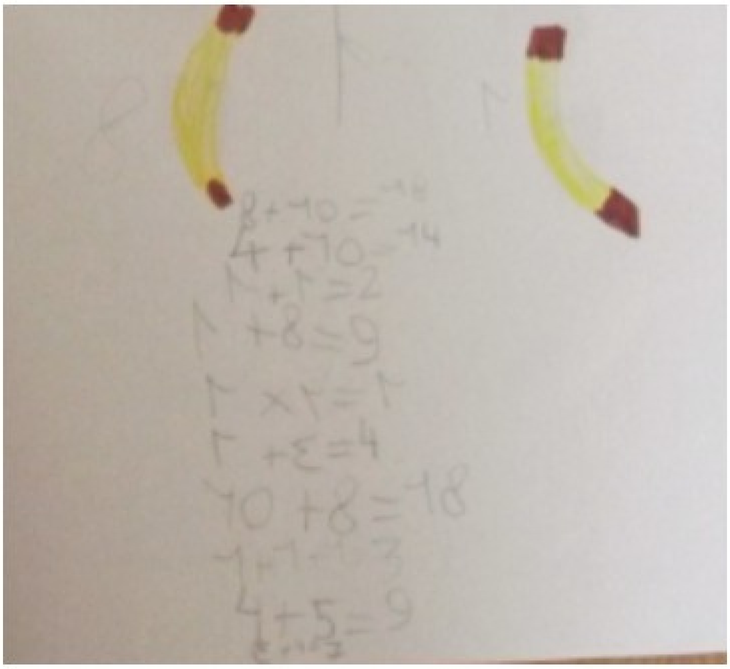
Photographie n°49 : extrait du Journal du Nombre de Damien

Date, le 19 février 2014

Les nombres de la liste A sont les suivants : 3, 10, 1 et 8. Pour les nombres de la liste B nous avons : 1, 4, 5, 1. Les nombres sont donc ≤ 10 pour chaque liste. Nous retrouvons trois fois le nombre 1 (il est présent deux fois dans la liste B et une fois dans la liste A). Chaque nombre est positionné devant le dessin du fruit représenté. Pour identifier davantage le nom du fruit, l'élève a coloré le dessin. Il existe une seule liste de calculs/problèmes écrite sous le trait vertical. Elle est centrée et appartient ainsi aux deux listes. Nous notons une écriture avec le « fois » (1 X 1 = 1) mais pas de calcul/problème de soustraction/différence. Il existe un calcul/problème avec trois termes même si les nombres impliqués dans le calcul représentent de petites « quantités » (1 + 1 + 1 = 3). Ensuite, trois calculs dont la somme est supérieure à dix (8 + 10 = 18, 4 + 10 = 14 et 10 + 8 = 18 (la commutativité)). Un fait surprenant, les nombres les plus grands se trouvent écrits dans la liste A (les nombres 10 et 8). Pourtant dans les dix calculs, six fois sur dix, ce sont les petits nombres qui sont écrits en premier dans les opérations. Les calculs sont les suivants avec le premier nombre le plus petit écrit comme premier terme : 8 + 10, 4 + 10, 1 + 8, 1 + 3, 4 + 5, 3 + 7. Ensuite, il y a deux calculs avec le nombre 1 (1 x 1, 1 + 1) et un calcul avec le terme le plus grand comme premier terme : 10 + 8. Il reste la décomposition en trois termes : 1 + 1 + 1.

Nous montrons les calculs/problèmes :

Les problèmes/calculs de la liste de fruits



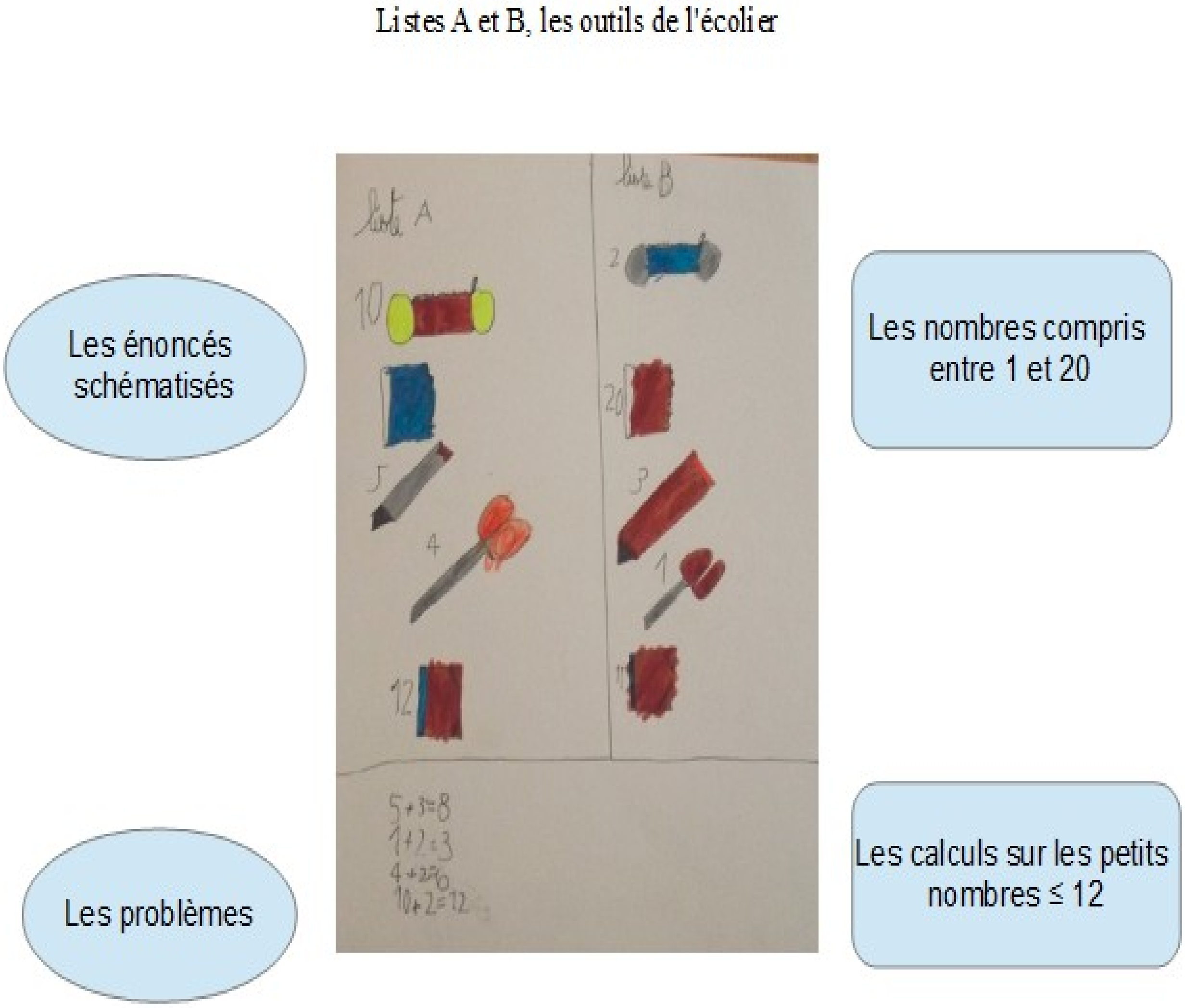
Photographie n°50 extrait du Journal du Nombre de Damien

Date, le 19 février 2014

La double page du Journal du Nombre de Isabelle nous indique une élève dans le contrat. Elle utilise les connaissances apprises précédemment en classe (le module Différence). Elles les réinjectent dans la nouvelle situation (les listes). La double page de Damien indique davantage un élève autonome dans ses apprentissages par la présence d'une seule liste de calculs/problèmes et la présence du signe « fois » (connaissance personnelle). La situation de la constitution de listes semble offrir au professeur des renseignements sur le *savoir comment* de chaque élève dans l'élaboration du Nombre et les différentes étapes de sa progression avec les *savoirs que* dont il dispose.

1.3.3 Une autre liste : le matériel de l' écolier

Le travail suivant nous paraît intéressant. Il est réalisé le 20 février 2014 et concerne une autre catégorie d'objets (le matériel de l'écolier). Les consignes sont respectées (la présence de deux listes A et B). De plus, l'élève trace sous les listes un trait horizontal. Il sépare ainsi le Journal du Nombre en deux zones (la zone du haut cahier et la zone du bas cahier) identifiées comme le contexte du problème et la recherche (idem le Journal du Nombre de Isabelle). Une autre contrainte est respectée, la limite imposée par le professeur pour le choix des nombres (liste A : 10 , oubli ?, 5, 4 et 12/ liste B : 2, 20, 3, 1 et 11). Dans la liste A, à côté des cahiers, il n'y a pas de nombres. Le nombre est présent dans la liste B (20) mais est-il le même pour la liste A ou est-ce un oubli de l'élève ? Les calculs interviennent davantage sur les petits nombres (5 + 3 = 8, 1 + 2 = 3, 4 + 2 = 6, et 10 + 2 = 12). Ils concernent souvent un objet de la liste A avec un objet de la liste B sauf pour le calcul/problème 1 + 2 qui raconte l'histoire des ciseaux et des trousses qui appartiennent à la même liste, la liste B. Les objets dessinés sont colorés pour aider à la reconnaissance. L'élève a produit quatre calculs/problèmes. Voici la production issue du Journal du Nombre de Joseph :



Photographie n°51 : Listes personnelles sur les « outils de l'élève » (Journal du Nombre de Joseph)

Date, le 20 février 2014

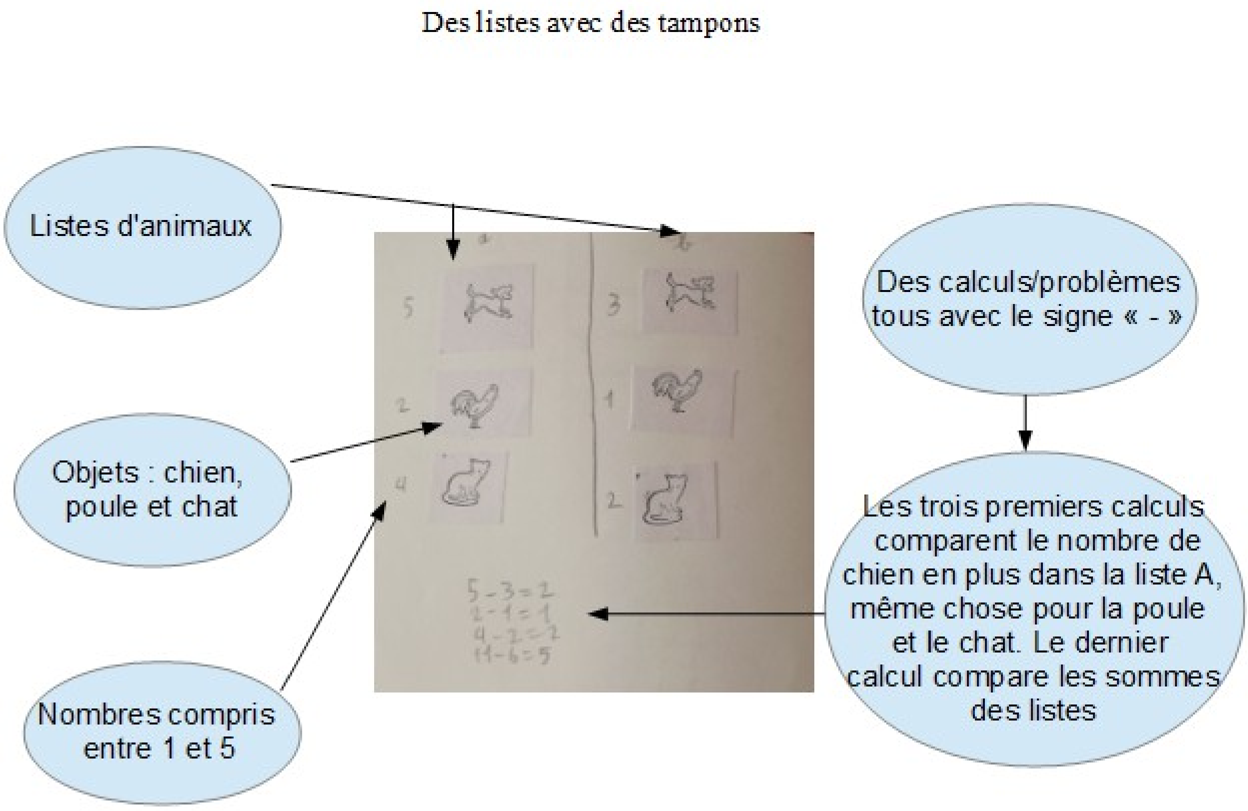
Les listes furent travaillées par d'autres moyens. Elles rendent l'élève davantage autonome dans la recherche de problèmes quelque soit son niveau acquis de lecture. Elles sont un moyen de « parler » les mathématiques.

1.3.4 Des exemples de listes de l'année 1

Nous avons sélectionné quatre autres productions avec trois supports différents sur le travail des listes dans le Journal du Nombre. Les productions comprennent des mots découpés dans une liste de mots (travail en lien avec la lecture), des tampons découpés (travail en lien avec les catégories) ou les listes sont directement rédigées dans le Journal du Nombre (travail en lien avec le codage des graphèmes/phonèmes, le lexique et l'accord du pluriel).

Des listes avec des tampons (d'animaux) découpés

Une première production pour laquelle l'élève découpe des images (tampon encreur) et constitue les deux listes habituelles.



Photographie n°52, extrait du Journal du Nombre d'Jean-Louis

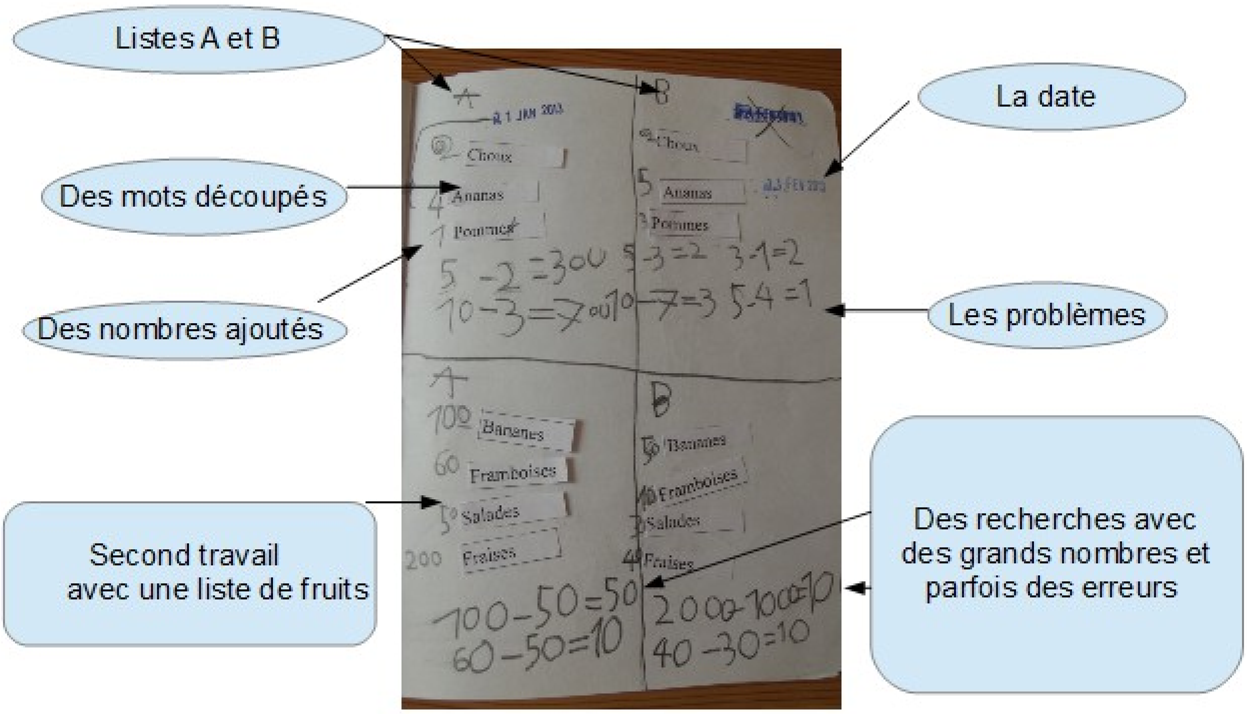
Date, le 10 mars 2013

L'élève dispose d'une planche avec des tampons sur laquelle il existe des animaux de différentes familles (les animaux de la ferme, domestiques, sauvages, à plumes, à poils …). L'élève travaille donc en complète autonomie. Il constitue une liste avec les animaux de son choix et il ajoute les nombres pour les listes A et B. Ici, l'élève a réinvesti les connaissances sur la soustraction/différence. Toutes les opérations comprennent le signe « - ». Il est intéressant de noter que l'élève a systématiquement comparé chaque « famille » : les chiens avec les chiens, les poules avec les poules et les chats avec les chats. Quant au dernier calcul/problème de la liste des opérations, il représente l'histoire de la somme de tous les animaux de la liste A comparée à la somme de tous les animaux de la liste B (11 – 5 = 6). Le calcul de la somme de la liste A et celle de la liste B n'est pas notée (les calculs ne sont pas écrits). L'élève a donc réalisé des calculs sur les objets de même famille/catégorie spécifique (les chiens avec les chiens) pour conclure par un calcul sur les catégories génériques (les animaux), une classe d'éléments.

Des listes avec des mots découpés dans un « répertoire de mots »

Procédé identique à la production précédente, hormis qu'il s'agit d'une planche de mots à découper pour la constitution des listes habituelles.

Des listes de mots préparés



Photographie n°53 : extrait du Journal du Nombre de Patrick

Date, le 23 février 2013

Cette fois-ci, la planche préparée par le professeur ne comprend plus de tampons encrés avec le dessin des animaux. Il s'agit de listes de mots tapés à l'ordinateur. Les mots (ou les tampons) sont prévus en double sur la planche afin de pouvoir constituer deux listes identiques. Le professeur n'impose pas de contrainte sur les nombres. L'élève réalise donc une première liste avec des petits nombres où il joue à écrire des problèmes du type 10 – 3 = 7 ou 10 – 7 = 3. Il reproduit ce même procédé avec le nombre 5 (5 – 3 = 2 ou 5 – 2 = 3).

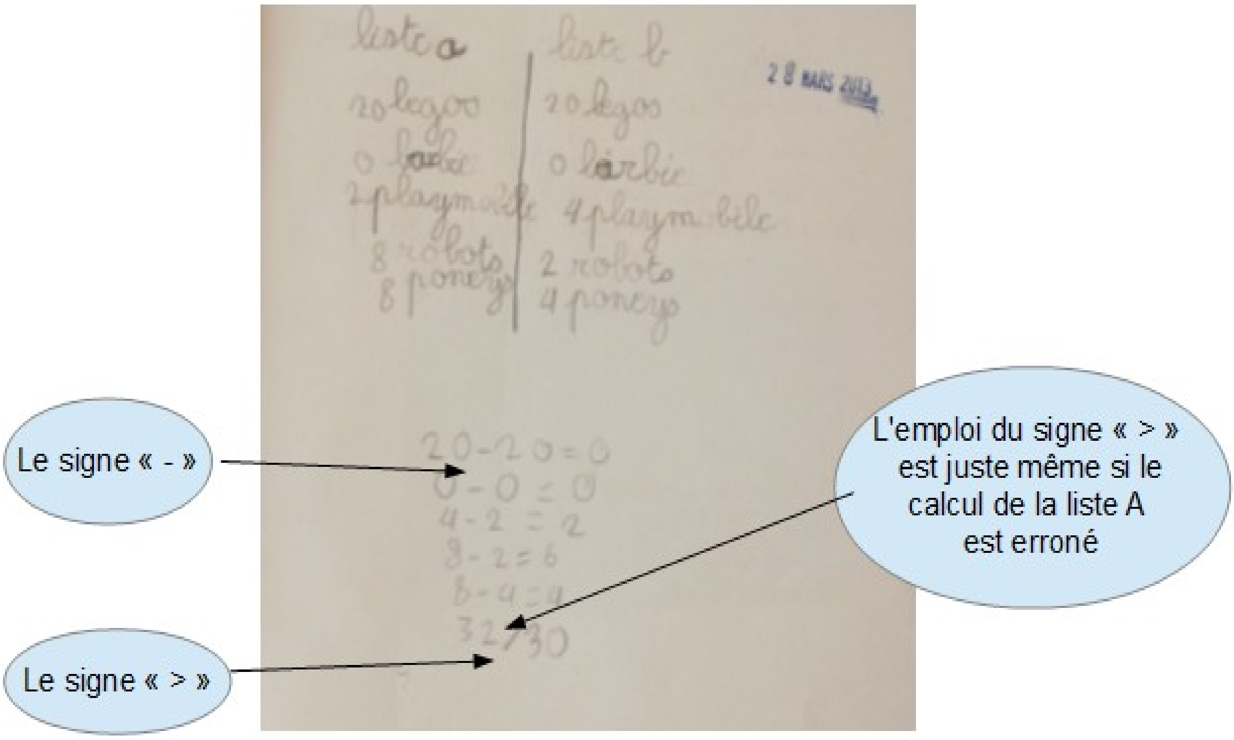
La seconde liste utilise des nombres plus grands, même de très grands nombres (2000/1000) avec le signe « - ». Une opération semble erronée (2000 - 1000 = 10) ou peut-être l'élève a-t-il manqué de place ?

Deux exemples de listes rédigées directement dans le Journal du Nombre

Les élèves ont élaboré une certaine référence à l'objet liste par une pratique régulière dans le Journal du Nombre. Ils ne produisent pas encore de réels énoncés de mathématiques puisqu'ils ont à leur disposition des images (tampons ou dessins) et/ou des mots. Ils jouent avec ces supports à inventer des calculs/problèmes. Les élèves calculent sur les objets. Ils utilisent les connaissances acquises. Nous notons beaucoup d'opérations vraies. Ils réinvestissent des signes mathématiques (les signes « + », « - » et « > ») et leurs connaissances personnelles parfois comme la présence du signe « x » à cette période de l'année. Une liste est aussi rattachée à un contexte : il existe des listes d'animaux, de jouets, de bonbons … Nous pourrions dire qu'une liste appartient à un ensemble. La production ci-dessous illustre une liste de jouets. La production de l'élève commence par un cas particulier de la différence puisque celle-ci est égale à zéro. Pour cela, l'élève compare deux collections/deux nombres qui sont identiques (20 legos). Il s'agit d'une liste rédigée par un garçon. Elle ne contient donc pas de jeu pour les filles. La liste produite par Jean-Louis comprend 0 barbie, à la fois, dans la liste A et dans la liste B. Le professeur a demandé à l'élève ce que signifiait le mot « poney ». Il s'agit d'un poney en plastique, un jeu et non d'un animal. La notion d'ensemble est donc respectée.

L'élève compare la somme de la liste A avec la somme de la liste B en utilisant le signe « > ». Le signe (>) code/signifie que la liste A est supérieure à la liste B. L'élève n'a pas écrit les calculs. Nous supposons qu'il a donc calculé « de tête ». Le calcul de la somme de la liste B est vrai. Il est assez facile parce qu'il n'a pas de retenue dans les unités. Nous nous expliquons. Il y a 20 + 0 + 4 + 4 + 2. Cela fait un total de 30. L'élève peut grouper les petits nombres qui font un nouveau dix (4 + 4 + 2). Le nombre à calculer comprend donc trois dix (deux dix pour vingt et le nouveau dix), c'est trente. Pour la liste A, il y a 20 + 0 + 4 + 8 + 8. L'élève écrit 32 pour la somme. Il semble omettre l'ajout de l'un des deux nombres 8 dans le résultat de son calcul. Le calcul semble être le suivant, le groupement de 4 + 8. Cela forme le nombre 12. Puis, l'élève a ajouté 20 + 12 = 32 ce qui est vrai. Pourtant, le second nombre 8 n'a pas été intégré au calcul. Cela nous apprend plusieurs choses. L'élève n'a pas utilisé la connaissance du double 8 (8+ 8) pour calculer la somme. Il peut exister plusieurs raisons à cela. Il pourrait ne pas posséder cette connaissance mais il s'agit d'un élève avancé. Il pourrait alors posséder la connaissance mais ne pas la mettre en œuvre de manière appropriée dans une situation de recherche/problème qu'il crée pourtant lui-même. Il pourrait aussi ne pas l'avoir « vu » dans l'écriture composée de plusieurs termes. Il est intéressant de se poser la question du pourquoi l'élève n'utilise pas cette connaissance du double 8. Par contre, la production de l'élève avec les calculs suivants mettent en œuvre une autre connaissance, l'utilisation de la notion moitié (4 – 2 = 2 et 8 – 4 = 4). Cela revient à calculer la moitié des nombres 4 et 8. La connaissance du double 8 a peut-être été « écarté » au profit des connaissances en cours d'élaboration plus récentes dans le Journal du Nombre : les nombres rectangles et carrés et la notion de moitié.

Des listes de jouets



Photographie n° 54 : extrait du Journal du Nombre d'Jean-Louis

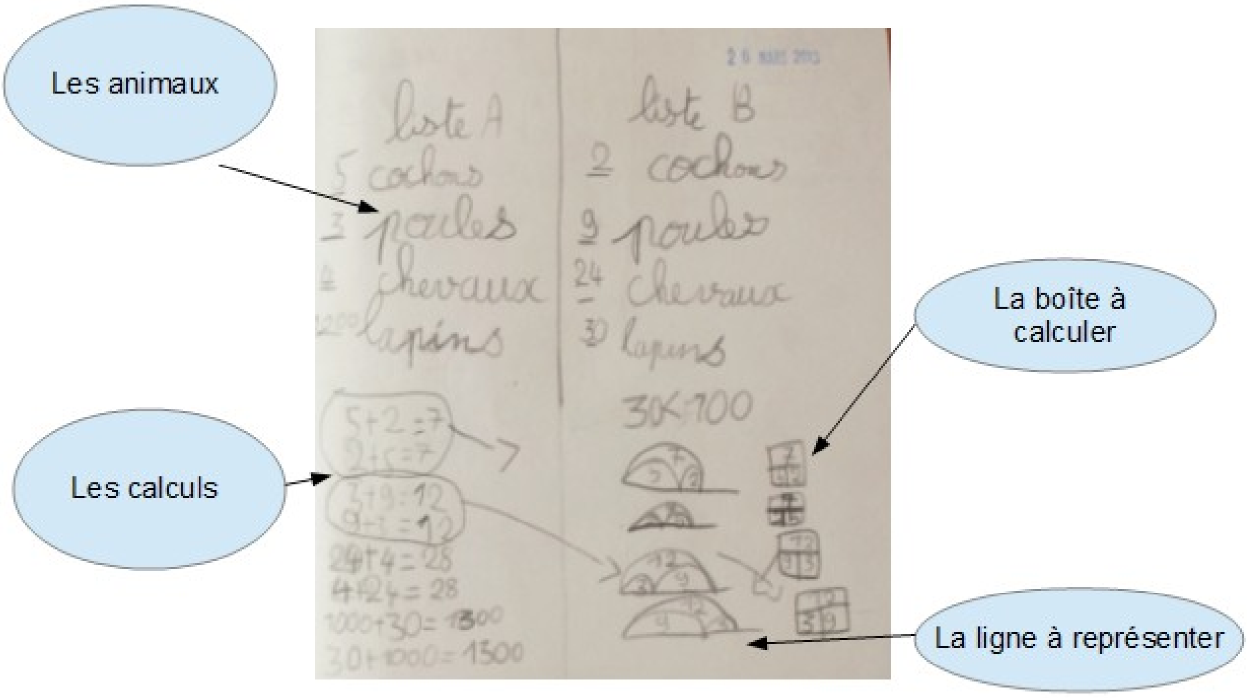
Date, le 28 mars 2013

La seconde production appartient au Journal du Nombre de Michelle. Elle concerne une liste d'animaux. Elle montre deux outils sémiotiques : la boîte à calculer et la ligne à représenter/penser/prouver (ligne qui évolue, d'abord graduée puis sans graduation comme dans la production de l'élève dans son Journal du Nombre). Ces outils sémiotiques sont présents dans la recherche ACE tout au long de l'année scolaire.

La boîte à calculer est un carré que l'on sépare en deux parties par un trait horizontal. Il existe alors deux parties. La partie située en haut permet d'inscrire le nombre-tout et la partie situe en bas se divise d'un ou de plusieurs traits verticaux. Elle se compose alors de plusieurs compartiments et permet d'écrire les nombres-parties. La boîte à calculer varie en fonction des décompositions et sert à l'étude de toutes les situations additives. (cf. la production de Michelle)

La ligne graduée est une ligne avec les graduations de un et les repères de 5 et de 10. Elle code les décompositions et représente aussi la structure du problème. Elle évolue pour ne garder que les graduations de 5 en 5 puis de 10 en 10. En fin d'année scolaire, l'élève résout même des problèmes avec une ligne sans graduation. (cf. la production de Michelle)

Des listes écrites par l'élève



Photographie n° 55 : extrait du Journal du Nombre de Michelle

Date, le 26 mars 2013

L'élève a tracé des flèches qui partent des calculs vers la ligne et la boîte à calculer. Il semble que la commutativité se montre sur/par les outils (la preuve) et se note dans les calculs. Ici, il semble que l'élève utilise les outils sémiotiques pour vérifier les calculs (ce que nous montre le sens de la flèche du calcul vers la ligne puis vers le boîte). Les nombres sont pour la plupart des petits nombres dans les deux listes, sauf deux nombres autour de la trentaine (les nombres 24 et 30) et un très grand nombre 1000 (en lien avec les lapins). C'est la combinaison des nombres 1000 et 30 qui provoque un calcul erroné. L'élève écrit 1300. Le nombre comprend quatre chiffres mais le trois est positionné/placé à la place du chiffre des centaines.

2. BREFS ÉLÉMENTS DE DISCUSSION

Le travail sur les listes a permis la construction d'une référence sur l'objet calcul/problème. Elle renforce aussi l'autonomie et la dévolution. L'élève réinvestit les connaissances étudiées mais surtout, il prend conscience que le nombre code, à la fois, une quantité (un élément), et représente aussi une catégorie (un ensemble). Ce double regarde est nécessaire dans la résolution de problème afin de comprendre l'enjeu du problème et l'enquête à mener. Nous aimerions faire un parallèle : ce double regard est aussi présent dans la numération de position puisqu'une collection peut être codée et perçue, à la fois, en unités (éléments) et en groupe de dix et/ou de cent. Les situations qui favorisent une entrée plurielle de la compréhension du nombre par la prise en compte des différentes représentations (associées à un même nombre) semblent aider l'élève à mémoriser des *savoirs que* afin de pouvoir mobiliser des *savoirs comment*.

3. LE TRAVAIL INTERMÉDIAIRE SUR LES FACTURES

Un travail dans la poursuite des listes avec les factures dont l'avantage est de centrer l'attention sur la comparaison des éléments à l'intérieur d'une même liste mais surtout amène l'élève vers l'initiation à un travail spécifique sur le pourquoi et le comment d'une question. Ce travail intermédiaire permet également l'étude/enquête de ce que représente/signifie la question et la recherche de différentes questions.

3.1 Les factures et le temps de l'incitation productive collective

Comme annoncé, le professeur décide d'initier un travail autour des factures. La classe écrit/recopie dans le Journal du Nombre la facture. La mise à l'étude de la question se réalise à l'oral avant et/ou après et même pendant les calculs réalisés. Cela permet une première compréhension de l'objet « question ». En fait, l'élève commence à cerner « l'objet question » d'un énoncé mathématique.

3.1.1 Une stratégie, des groupements pour le calcul la facture

Une production personnelle

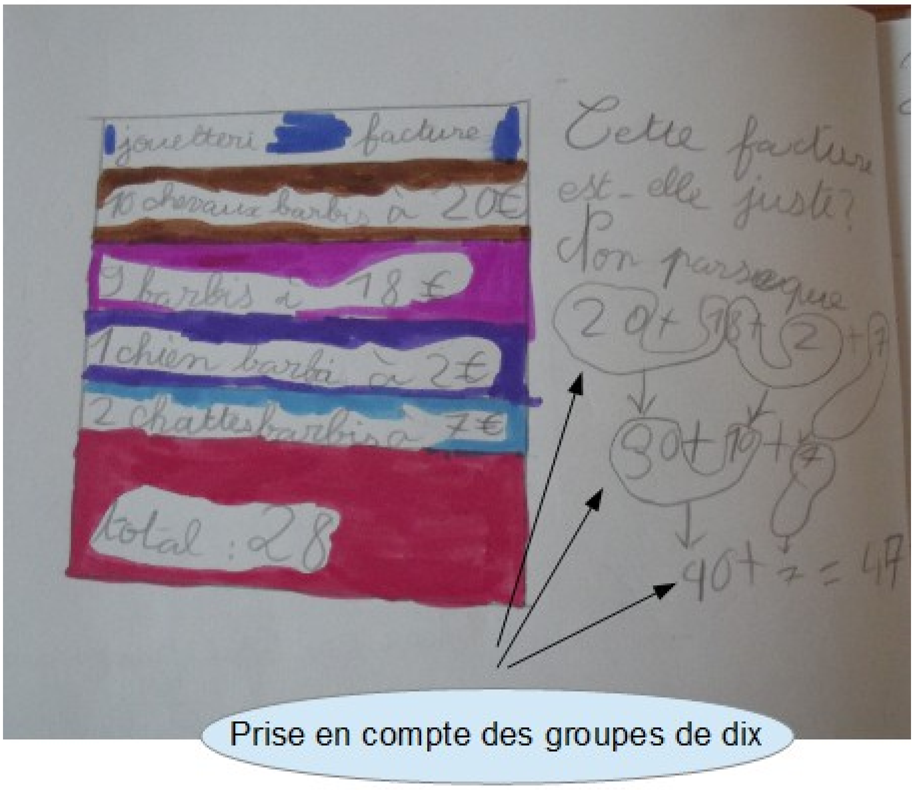
Photographie n°56 : la facture de bonbons (Aurore)

Date, le 23 mai 2013

L'élève a produit une facture de bonbons. L'enquête menée est le total à payer pour cette dépense. Elle a omis d'indiquer le prix d'un objet (les bonbons en forme de banane). Il est intéressant de noter que l'élève fonctionne par groupements pour le calcul terminal. Les groupes sont constitués par les nombres les plus proches géographiquement (un groupe avec les nombres 2 et 1 puis le second groupe avec les nombres 8 et 9 puisque les nombres se suivent dans la facture). La somme de la facture est écrite sous la forme d'une décomposition additive 17 + 3 ou 3 + 17 mais également dans la case « total à payer » avec le nombre 20. Le calcul est vrai mais l'élève aurait pu procéder à des groupements différents en associant par exemple les nombres 2 + 8 et 1 + 9. C'est ce que nous montre la production d'un autre élève qui recherche les dix.

3.1.2.Une autre stratégie, des groupements par dix pour le calcul de la facture

Production personnelle



Photographie n°57 : la facture de jouets (Michelle)

Date, le 23 mai 2013

Ici, l'élève s'est donnée un problème/recherche à elle-même issu de l'incitation productive collective sur la facture de la papeterie (cf. les photographies ci-dessous). Elle a produit une facture de jouet avec un montant. La question posée est la suivante : « la facture est-elle juste ? » L'élève utilise les calculs et la stratégie du groupement par dix pour argumenter. Elle précise que la facture (le montant) n'est pas juste puisque les calculs prouvent le nombre 47 avec la mise en valeur des dix. Sur la photographie, il est possible de suivre l'accroissement du groupe de dix (de 20, il devient 30 puis 40) auquel ne sont pas oubliées les 7 unités.

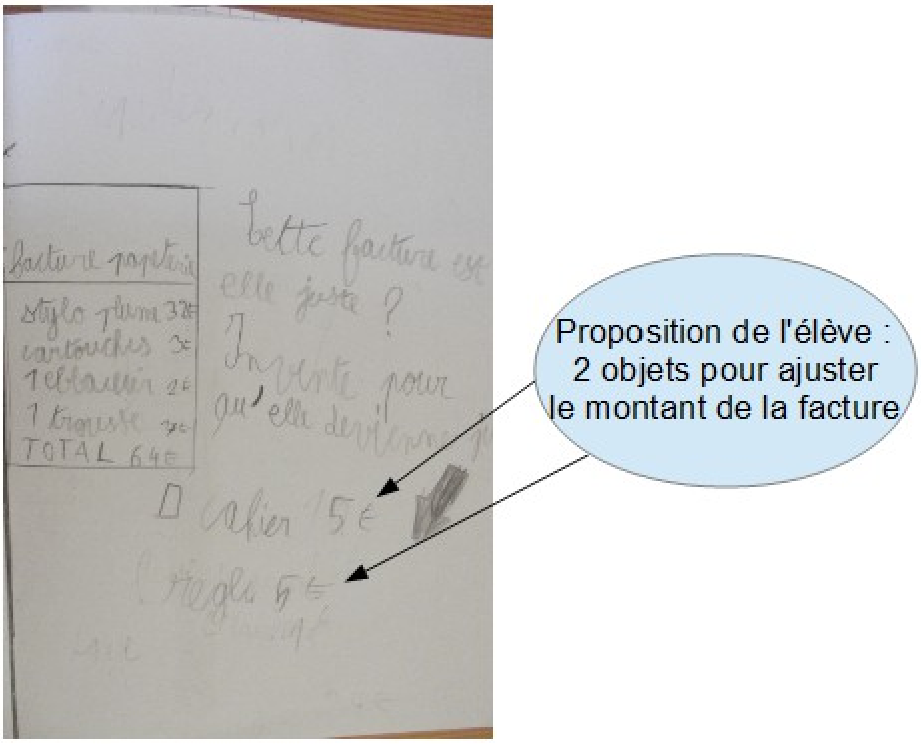
3.2 Deux productions réalisées pendant l'incitation productive collective

Les deux productions ci-dessous illustrent un travail lors de l'incitation productive collective. La facture de départ est identique mais le Journal du Nombre des élèves est différent. La proposition réalisée par chacun des élèves est juste et pourtant différente mais répondre au problème.

3.2.1 Une proposition d'ajustement par deux objets de cinq

Alexandre utilise une décomposition pour compléter le montant de la facture :

Travail pendant l'incitation productive collective sur la facture



Photographie n°58 : la facture de papeterie (Alexandre)

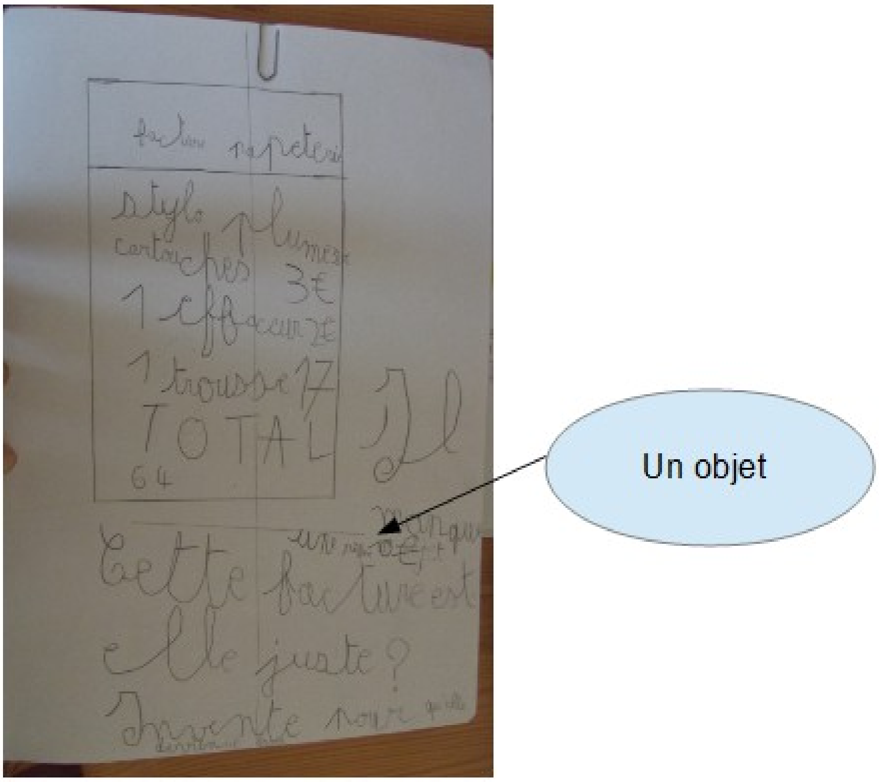
Date, le 17 juin 2013

La situation demande à l'élève, puisque la facture n'est pas juste, de remédier au problème. Cette production montre un élève qui calcule la somme de tête (connaissances en lien avec le module Calcul mental). Les objets présents sur la facture coûtent 32 euros pour le stylo-plume, 3 euros pour les cartouches, 2 euros pour l'effaceur et 17 euros pour la trousse. Le montant affiché est de 64 euros. Le montant réel de la facture est de 54 euros. L'élève propose donc deux objets à 5 euros chacun pour rendre la facture juste/vraie (un cahier à 5 euros et une règle à 5 euros). L'ajoût de 10 euros par la décomposition 5 + 5, permet de valider la facture. Pour le même travail, un élève propose une autre proposition pour le même problème (il manque 10 euros sur la facture).

3.2.2 Une proposition d'ajustement par un objet de dix

L'élève ne propose pas une décomposition pour le nombre dix mais un groupe de dix. Est-ce en rapport avec le travail sur la monnaie et les situations où il est nécessaire de représenter la même somme d'argent avec le moins de pièces et de billets possibles ? Nous ne savons pas mais nous pouvons dire que cette production montre un élève qui recherche « l'économie ». Chaque production d'élève a de la valeur et enrichit le débat. Ces travaux sont aussi une source de « création de situations » pour le professeur qui choisit d'ancrer l'enquête/étude à partir les questions des élèves.

Même situation mais proposition différente de l'élève



Photographie n°59 : la facture de papeterie (Patrick)

Date, le 17 juin 2013

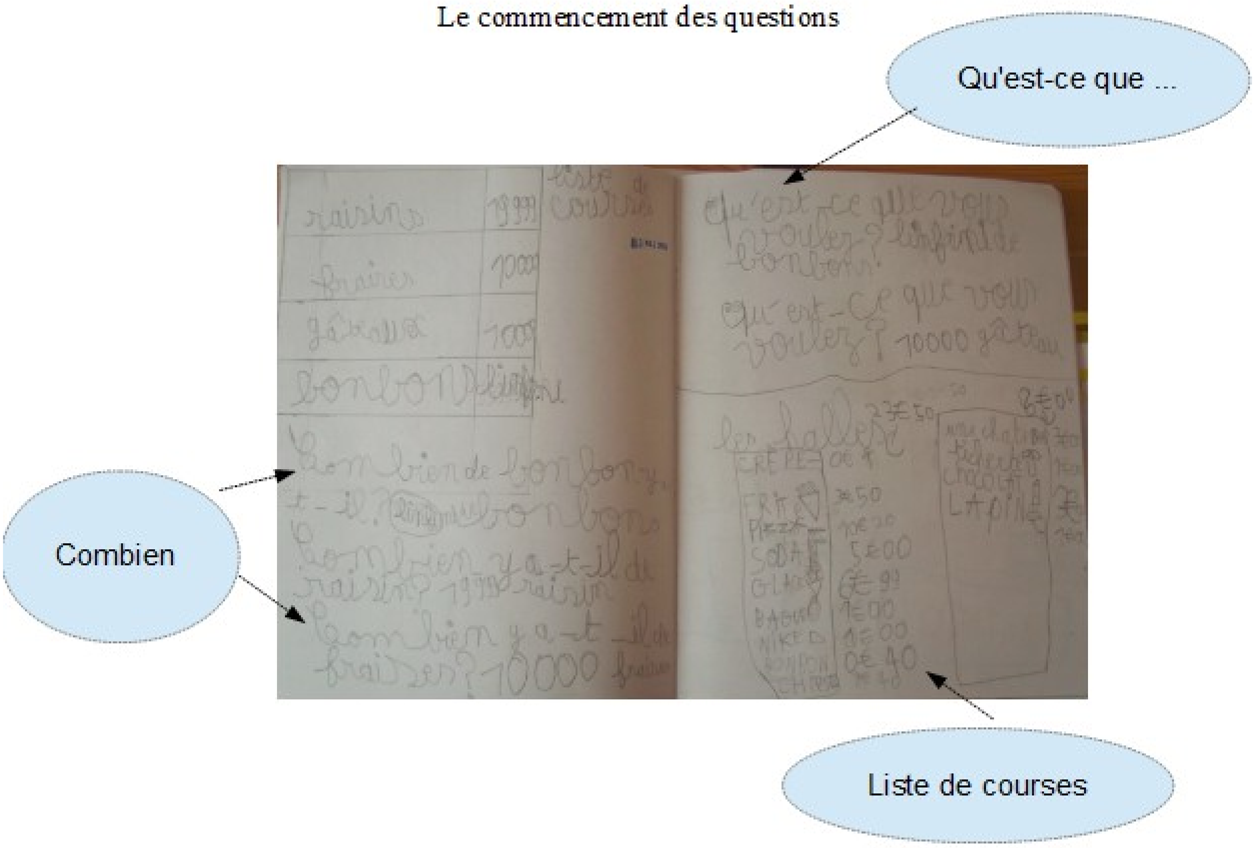
L'élève a, lui aussi, réalisé un calcul juste de la somme de la facture. Il écrit dans son Journal du Nombre, il manque une règle à 10 euros. Les différentes propositions nourrissent le débat. Elles apportent une autre référence dans la classe : un problème peut avoir la même solution mais celle-ci peut-être codée sous des écritures différentes. L'élève a même répondu à l'enquête par une phrase qui contient « il manque... ». La classe va s'entraîner à poser des questions à partir des listes/factures réalisées précédemment.

3.3 Le travail sur les énoncés

Nous présentons différents travaux pour retracer la chronologie du travail sur les énoncés. Les énoncés se sont construits sur le long terme. En fin d'année, tous les élèves produisent des énoncés de problème avec des « capacités différentes » mais tous ont progressé.

3.3.1 Les différentes types de questions

La double-page du Journal du Nombre de Patrick montre et permet de comprendre l'emboîtement du travail sur les listes et les énoncés.



Photographie n°60 : la double-page du Journal du Nombre de Patrick

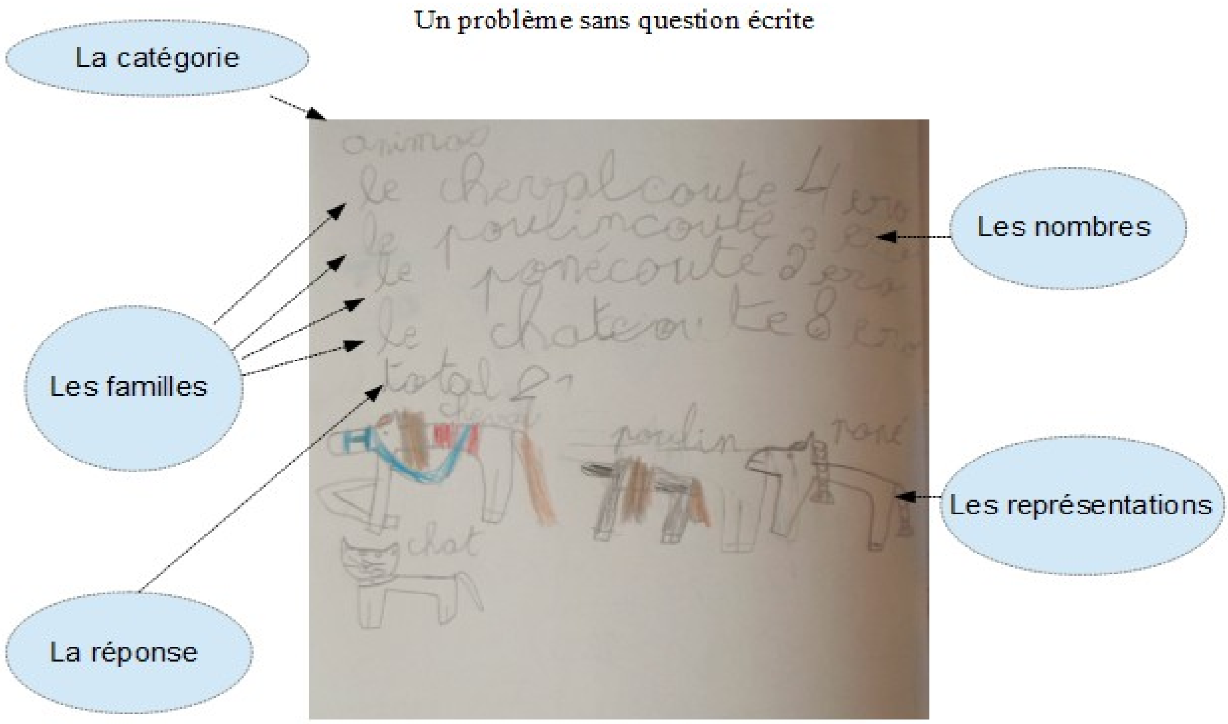
Date, le 13 mai 2013

Une question mathématique est-elle une question ordinaire ? Toutes les questions fonctionnent-elles avec un énoncé de mathématiques ? La production de questions a généré des questions auxquelles la classe ne savait pas répondre parce qu'il y avait pas vraiment de réponse ou pas de question (ou trop générale/trop vague) ou encore, nous n'avions pas les éléments pour le faire. Les questions auxquelles on répond par oui ou non. Les questions qui n'en sont pas. Les questions qui ne sont pas en lien avec le problème. Il y a eu aussi les questions auxquelles on répond par un mot. Puis les questions auxquelles on répond par un nombre. Les questions qui commencent par « combien » et impliquent un nombre. Il y a aussi les questions avec « qu'est-ce qui ... », ou encore les « pourquoi ... ». Toutes ces questions sont-elles bien des questions et peut-on y répondre. Certains élèves ont noté la présence du point d'interrogation qui représente une question mais cela suffit-il ? D'autres élèves ont précisé leur désaccord en relation avec dans le module Calcul mental. Lorsque l'élève ne connaît pas un nombre, il a la possibilité d'inscrire un point d'interrogation dans la fiche de calcul. Le point d'interogaion ne signifie pas toujours une question.

Puisque l'élève est le propre producteur de ses énoncés, une autre question s'est imposée. La question notée/formulée dans le Journal du Nombre demande une réponse. Cela a perturbé un nombre important d'élèves puisque l'auteur de l'énoncé connaît/sait la réponse (ceci reste toutefois à vérifier mais l'élève pense connaître la réponse de son énoncé et n'éprouve pas toujours la nécessité d'y répondre). La question devait-elle, alors être notée dans le Journal du Nombre ? De plus, comment mettre en œuvre une situation avec la pratique des problèmes pour tous, c'est-à-dire l'utilisation d'un énoncé individuel pour une étude/enquête collective (ou en groupe) ?

Le travail, ci-dessous, a été lu à l'ensemble de la classe. Sans la question, certains élèves ont demandé ce qu'il fallait chercher :

3.3.2 Une question implicite et l'absence de la question écrite



Photographie n°61 : une question implicite du Journal du Nombre de Gwena

Date, juin 2013

L'auteur de la producteur a répondu au groupe : il faut chercher « le total/combien ça coûte ». Pour l'élève, il était évident que le problème portait sur la recherche du coût de l'ensemble puisque dans chaque phrase il y a le mot « coûte ». Pour le reste des élèves, cela n'était pas aussi évident. Ils n'étaient pas d'accord. Ils répondaient : « tu ne l'as pas dit. » Finalement, ils se sont mis d'accord que cet énoncé ne comportait pas de question.

Les quatre problèmes ci-dessous sont rédigés par Aude, une élève moins avancée. Voilà les quatre énoncés qu'elle produit que nous reproduisons afin de gagner en lisibilité (cf. la production de Aude ci-dessous) :

-premier énoncé : pourquoi des chevaux et pas 5 chevaux parce que c'est la réponse des dés.

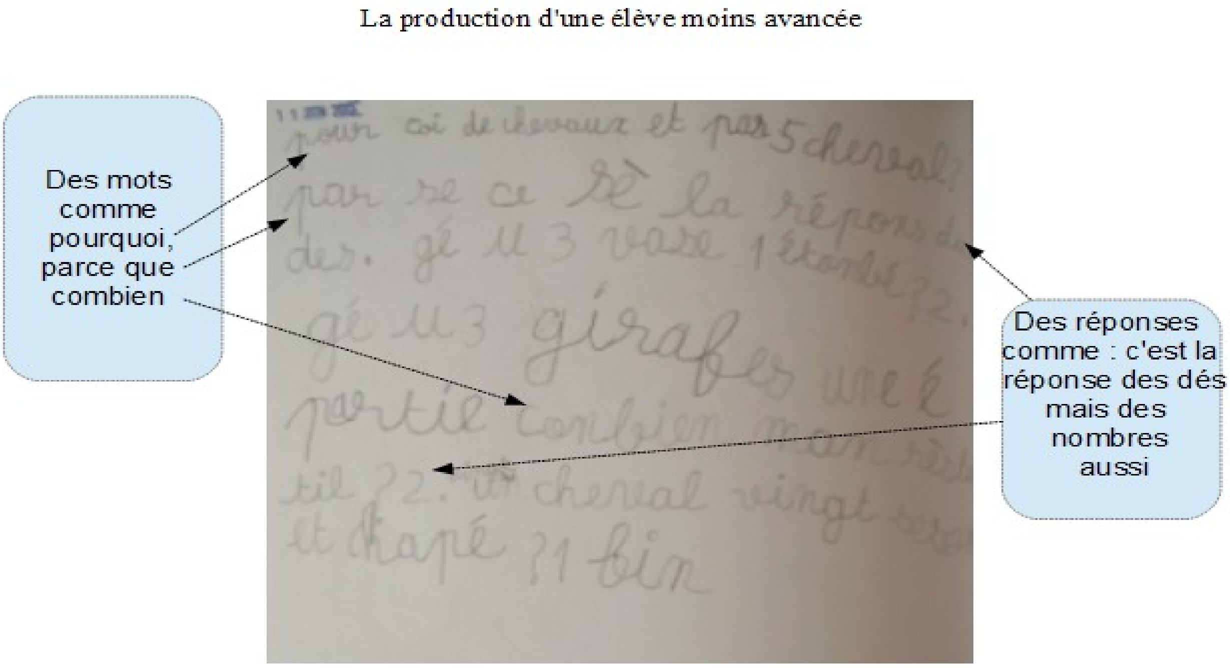
-second énoncé : j'ai eu 3 vases 1 est tombé ? 2

-troisième énoncé : j'ai eu 3 girafes une est partie combien m'en reste-t-il ? 2

-dernier énoncé : vingt et un cheval vingt se sont échappés ? 1 fin

On note peu de ponctuation dans les énoncés orignaux mais plusieurs fois la présence du point d'interrogation qui remplace/signifie la question-problème.

3.3.3 Même les élèves moins avancés produisent des énoncés de problèmes



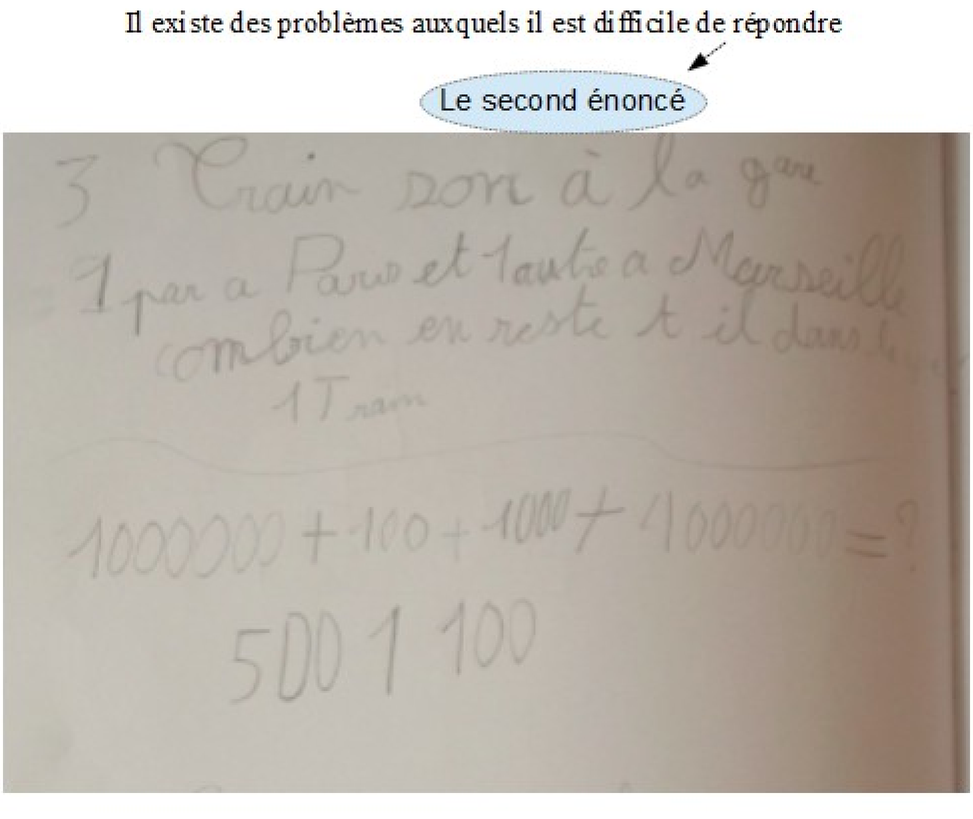
Photographie n°62 : des énoncés de problème produits par une élève moins avancée (le Journal du Nombre de Aude)

Date, le 11 juin 2013

L'élève produit des énoncés avec de très petits nombres comme si la stratégie consistait à se « rassurer » dans un espace numérique maîtrisé puisque beaucoup d'énergie se déploie dans la structure du problème (pour l'écriture). La phrase-question qui termine l'énoncé est très souvent absente sauf pour le troisième problème avec les girafes (combien …). Elle est souvent remplacée par la présence du point d'interrogation comme nous l'avons évoqué. La réponse se trouve directement derrière le point d'interrogation. Seul le premier énoncé et sa réponse semblent « mystérieurs » sinon l'élève joue au jeu demandé par le professeur comme les autres élèves de la classe.

3.3.4 Des problèmes sans réponse à un temps t des apprentissages

La production suivante appartient à un élève avancé. Il utilise, lui aussi, les petits nombres pour le premier énoncé. Ce n'est pas le cas pour le second énoncé. La production se distingue ou se différencie par la structure du problème. Aude travaille avec les petits nombres et il y a une seule relation (une seule transformation) dans le problème. Voici l'énoncé : « j'ai eu 3 vases et 1 est tombé ? 2 ». Jean-Louis travaille avec les petits nombres mais il existe plusieurs relations (plusieurs transformations). Voici l'énoncé : « 3 trains sont à la gare. 1 part à Paris et un autre à Marseille. Combien en reste-t-il à la gare ? 1 train » Le nombre 3 subit deux stransformations l'une après l'autre. Dans le problème de Aude, le nombre 3 ne rencontrait qu'une seule transformation. La quantité d'écrit (pour chaque énoncé de problème) est différente dans les productions des deux élèves. Les énoncés de Aude sont « dépouillés », mais ils restent composés de l'essentiel. L'énoncé d'Jean-Louis détaille davantage la situation et il formule la question-problème. Le second problème proposé par Jean-Louis est de nature différente. Le problème n'a pas besoin d'une situation puisqu'il s'agit d'un long/grand calcul (une suite de grands nombres) avec des nombres très importants. Il s'agit d'un problème mais il ne représente pas un énoncé de problème constitué de mots.



Photographie n°63 : l'existence de problème que la classe ne sait pas résoudre pour l'instant

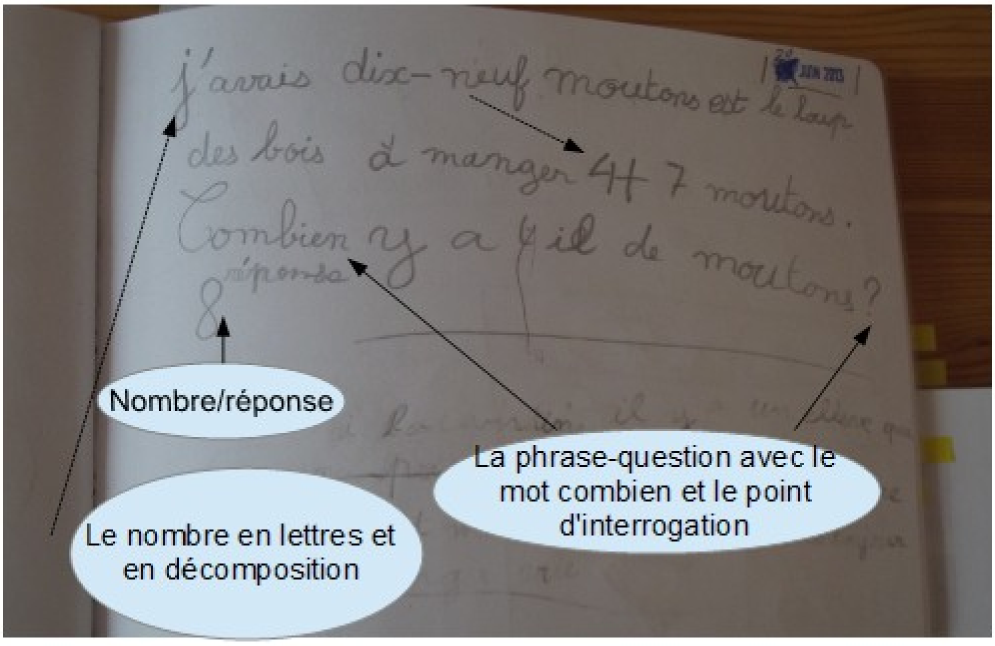
(Journal du Nombre d'Jean-Louis)

Date, le 20 juin 2013

3.3.5 Un énoncé de problème pour montrer l'élaboration du nombre

Que nous apprend la production suivante sur la compréhension du nombre par l'élève auteur de l'énoncé ? Lorsque nous observons ce travail d'élève, nous notons que le texte (l'énoncé) est constitué de deux phrases dont l'une est la question-problème. La situation décrite est explicite. L'élève précise être détentrice de dix-neuf moutons. La transformation est apportée par le loup des bois qui mange des moutons évidemment comme dans toutes les histoires de loup et de moutons, (enfin presque). La structure du problème connaît deux transformations dans le nombre de moutons mangés. Il est fourni par la décomposition 4 + 7 (c'est plus que dix). La recherche demande d'effectuer un premier calcul qui concerne le nombre de moutons réellement mangés. Pourtant, le problème n'est pas terminé. La question posée est la suivante « Combien y a-t-il de moutons ? » L'élève répond 8 dans le Journal du Nombre. La réponse attendue est bien le nombre de moutons qui n'ont pas été mangé par le loup des bois, c'est-à-dire à la fin de l'histoire. La formulation de la question-problème interroge la classe parce que le nombre de moutons est connu dès le départ. L'élève explique qu'elle parle de la fin, après le passage du loup. C'est la diffusion de l'énoncé du problème à l'ensemble de la classe qui fait prendre conscience à l'élève et aux autres élèves de l'implicite contenu parfois/souvent dans les productions d'écrits.

Le problème des moutons et du loup



Photographie n°64 : la construction du nombre dans le Journal du Nombre d'Aurore

Date, le 20 juin 2013

L'élève semble disposer de plusieurs représentations pour le nombre. Elle écrit dix-neuf en lettres et la réponse huit en chiffres (8). Elle propose un nombre de moutons mangés sous la forme d'une décomposition (4 + 7) pour le nombre 11. Le problème proposé par Aurore est la recherche de 19 – 11 = 8. L'élève pourrait formuler l'énoncé de problème ainsi : « j'ai 19 moutons et le loup des bois a mangé 11 moutons. Combien y a-t-il de moutons (non mangés) ? » La recherche/calcul serait-elle plus facile avec cette dernière structure ? Dans l'énoncé d'Aurore, l'élève qui ne calcule pas le nombre 11 pour la décomposition 4 + 7 « a perdu » même si l'enjeu du problème lui est accessible. Ensuite, il ne doit pas oublier de calculer 19 – 11. L'élève doit donc maîtriser le résultat d'un calcul intermédiaire qui conditionne la recherche du nombre de moutons mangés. Le nombre d'erreur possible semble augmenter avec ce type de structure de problème. Dans l'énoncé « retravaillée » éventuellement, l'élève peut organiser le calcul sur les unités directement puisqu'il existe une dizaine dans les deux nombres 19 et 11. Le calcul revient alors à 9 – 1 = 8. Lors du débat, Aurore expliqua à la classe qu'elle voulait faire un problème difficile à trouver d'où la question sur le nombre de moutons qui reste et non sur les moutons mangés par le loup.

Une lecture sommaire de l'énoncé peut donc orientée la recherche sur les moutons mangés qui ne sont que le calcul intermédiaire mais non pas la solution au problème. Le nombre de moutons (4 + 7) fait bien parti de la recherche mais l'élève peut/ne doit arrêter l'étude/enquête à cet endroit-là.

4. BREFS ÉLÉMENTS DE DISCUSSION

Les énoncés de problèmes ont besoin de beaucoup de temps. Ils sont à envisager sur l'ensemble de l'année scolaire. Ils demandent une progression spécifique puisque les élèves sont en apprentissage pour la lecture-écriture. Le travail à l'oral et de la représentation placent l'élève comme producteur de ses propres énoncés de problèmes assez rapidement. L'élève produit des listes et des énoncés en relation avec sa compréhension et connaissance des nombres et des relations qu'il possède à un temps t des apprentissages. Ces travaux d'élèves fournissent au professeur des connaissances de la compréhension du nombre de la classe et des élèves (par l'observation des productions individuelles) mais ils permettent à l'ensemble des élèves de progresser par le partage des énoncés dont la mise en débat consolide la compréhension et l'enseignement/apprentissage. Nous donnons à voir maintenant une progression possible sur le travail des énoncés effectuée lors de l'année 1 (2012/2013).

CHAPITRE 4 : l'élève producteur de ses propres énoncés

Dans cette section, nous abordons une étape décisive dont l'enjeu est de pousuivre la construction du rapport spécifique à l'objet « question » mais surtout de rapprocher l'élève d'une zone dans laquelle celui-ci va pouvoir construire des savoirs pour devenir le producteur de ses propres énoncés (cf ; le travail suivant sur les énoncés). La capacité générique de produire des énoncés s'accompagne du développement de l'autonomie que nous allons décrire au moyen de deux situations : les jeux de « la facture est-elle exacte ? » et « la facture exacte ou fausse ». Nous commençons le développement de notre structure argumentative par la description du jeu de « la facture est-elle exacte ? ». Nous montrons qu'elle contraint l'élève à rechercher la preuve par le calcul et introduit le début des premières phrases écrites argumentatives du type « parce que ». De cette première situation est née le jeu de « la facture exacte ou fausse » où l'élève se donne des problèmes à lui-même et en donne à la classe. Il invente des factures dont le montant est vrai ou faux qu'il soumet aux élèves. La section suivante décrira l'élaboration d'un système hybride entre la liste et la facture dont l'élève s'empare pour penser les différents types de questions. Nous terminerons par la production d'énoncés.

1. LE TRAVAIL INTERMÉDIAIRE SUR LES FACTURES

Nous allons expliciter tout d'abord comment les élèves de cours préparatoire ont élaboré un rapport générique puis spécifique à l'objet « question ». Pour retracer la construction de ce rapport, nous étudions la mise en œuvre d'un temps d'atelier à partir d'une situation de la vie quotidienne. Puis, nous poursuivons par l'analyse de productions d'élèves (les factures) réalisées dans le Journal du Nombre.

Les élèves ont progressé dans l'élaboration des listes A et B, et la recherche des calculs-problèmes. Nous décidons de la poursuite du travail à partir d'une liste spécifique, la facture. Ce « type » d'écrit centre l'attention sur la comparaison ou les calculs partiels (et/ou totaux des éléments à l'intérieur d'une même liste) mais *surtout* il devrait initier l'élève à un travail spécifique sur le pourquoi et le comment de la présence d'une question puisqu'au bas de cet écrit se trouve un montant. Le travail sur les listes a permis de « parler » et/ou d'inscrire les calculs dans un contexte/une histoire mais la situation n'était pas nécessairement favorable à la production de questions. Nous avons vu que les élèves construisent souvent les problèmes/calculs en fonction des répertoires connus et avec de petits nombres par exemple.

Les questions sont pourtant indispensables à la production des énoncés de problèmes. Le travail intermédiaire sur les factures est donc pensé pour permettre l'étude de l'objet « question mathématique » et notamment ce que représente/signifie une question. Ce travail pourrait également permettre de débuter une exploration des différentes questions.

1.1 Les factures et le temps de l'incitation productive collective

Comme annoncé, le professeur décide d'entamer un travail autour des factures, mais la définition et la compréhension de l'objet « question » n'est pas facile pour des élèves de cours préparatoire. Ce que nous recherchons n'est pas un travail de nature grammaticale sur le comment produire une question écrite et les différents types de questions. Nous cherchons plutôt la construction d'expériences liées à l'objet « questions ». Nous cherchons à faire en sorte que l'élève « engrange » une variété de situations associées à des questions pour la construction d 'une référence commune.

Précédemment, les élèves ont fourni quelques exemples de questions pour tenter de définir l'objet « question ». Généralement, les exemples sont construits à partir des mêmes mots inducteurs comme « qu'est-ce que ... » ou « pourquoi ... ». Pour favoriser et explorer la production de questions et de réponses associées, nous avons introduit un jeu, je jeu de la marchande que nous allons décrire précisément ci-dessous. La situation prévue (avec une balance et une caisse enregistreuse) possède, selon nous, un autre atout puisqu'elle continue de permettre de raconter des histoires mathématiques et de faire « parler » les mathématiques. En d'autres termes, nous nous demandons si le jeu de la marchande va permettre aux élèves de produire des calculs/problèmes avec une référence de conceptualisation sémantique particulière.

1.1.1 Le jeu de la marchande et la caisse enregistreuse

La séance est prévue en deux temps avec un temps collectif et un temps d'atelier par équipe de quatre élèves. Nous insérons ci-dessous une photographie de la vue d'ensemble du Jeu de la marchande.

Décrivons-en la structure du jeu à travers l'exemple de sa première occurrence. Le professeur désigne deux élèves pour « jouer » une scène de magasin, il s'agit de la mise en situation (une scène de la vie courante) d'une marchande avec un client. Les deux élèves sont face à la classe (temps collectif). Le client (un élève) demande : « des bananes » et la marchande (une élève) lui les donne. Le professeur arrête l'échange et pose la question suivante à la classe : « est-ce que cela se passerait ainsi ? ». Un élève répond : « Non. Il faut dire bonjour ». Un autre dit : « la marchande doit demander : qu'est-ce que vous voulez aujourd'hui ? ». Il s'ensuit un échange sur la pesée des bananes et l'enregistrement du prix.

La classe ayant compris maintenant le pourquoi de la situation, nous rejouons la scène avec deux nouveaux élèves, avant de passer au temps de l'atelier.

Il y a cinq ateliers de prévus afin que chaque élève puisse construire des expériences sur l'objet « question » à la fois dans les rôles de la marchande et celui de client. Nous précisons que l'atelier « marchande » est resté présent dans la classe plusieurs semaines. Les élèves pouvaient fréquenter l'atelier lorsqu'ils en avaient envie : faire des pesées, rendre la monnaie. Ils ont même fabriqué des étiquettes pour les produits à vendre. Cela permettait également un retour sur les connaissances avec la monnaie à partir des pièces et des billets fictifs. Le jeu de la marchande devait permettre l'élaboration d'un rapport particulier à l'objet « question ». La situation bâtissait ainsi un rapport de type générique à l'objet « question », puisque les élèves disaient aussi bien : « Comment allez-vous ? », « Vous voulez des bonbons », « Est-ce que vous avez des gâteaux au chocolat » avant d' ancrer plus solidement le rapport spécifique à l'objet « question » de l'énoncé de mathématiques.

C'est ce que nous allons tenter d'observer à partir de plusieurs productions issues du journal du Nombre dont trois productions de générations différentes (1, 2 et 3) de Gwena.

1.1.2 Le premier travail au sujet des factures dans le Journal du Nombre

Juste avant le travail sur les factures, les élèves ont rapporté des tickets de magasins afin de les observer et de lister les informations portées sur le morceau le papier. Nous montrons un exemplaire de ce travail avec la reproduction (il ne s'agit pas d'une copie). L'élève invente un ticket de magasin de son choix qui comprend le nom du magasin, les objets achetés et le mode de paiement par exemple. Nous sommes au début de l'élaboration de la conceptualisation sémantique particulière.

Essai 1 : travail à partir de vrais (réels) tickets

Photographie n°65 : le ticket de courses (Journal du Nombre de Michelle)

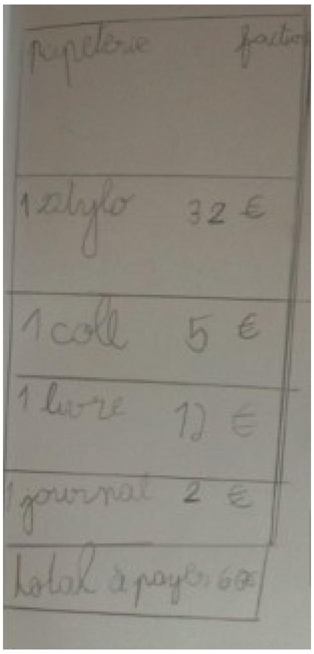
Date, le 7 mai 2013

Ce travail permet d'initier et de justifier un travail autour des factures et de créditer le jeu de la marchande. La photographie donne à voir une idée générale du contenu obtenu dans les Journaux du Nombre.

Le professeur propose l'étude dans le Journal du Nombre la facture que nous allons étudier ci-dessous.

Le professeur explique aux élèves qu'ils vont tout d'abord tracer la structure globale de la facture à la règle dans le journal du Nombre. La classe va réaliser progressivement le traçage. Pour cela, les élèves sortent leur règle (retour rapide sur l'usage de cet outil). Le professeur n'impose pas le nombre de centimètre à respecter mais il guide les élèves dans le tracé avec des demandes précises (traçage d'un trait horizontal près du bord supérieur de la page puis un autre trait horizontal en dessous en faisant glisser la règle à partir du premier trait). On trace alors un trait environ de même longueur. Le professeur fait tracer tous les traits horizontaux, mais il attire l'attention sur la nécessité de laisser de l'espace entre chaque trait tracé afin de pouvoir écrire (à l'intérieur des traits). Il fait compter le nombre de trait horizontaux sur les cahiers. Puis, la classe passe aux traits verticaux (les bornes extérieures). Le professeur a réalisé au tableau et en même temps le déroulement du traçage. Il existe maintenant sur le tableau la même facture (la même structure globale, le même cadre) que celle tracée dans le Journal du Nombre de chaque élève. La classe a écrit/recopié dans le Journal du Nombre la structure de la facture. Il reste à compléter le document avec les objets, les prix et le total. Nous présentons la facture réalisée avant la poursuite de notre propos.

Essai 2 : la facture est-elle exacte ?



Photographie n°66 : la facture (Journal du Nombre de Gwena)

Date, le 22 mai 2013

A la fin du travail de copie (le nom des objets, les prix et le total à payer), le professeur écrit au tableau une phrase : « la facture est-elle exacte ? ». Il demande aux élèves de la lire silencieusement. Ensuite, la classe se demande s'il s'agit d'une question. Un élève répond qu'il est certain que la phrase est une question puisqu'il y a l'existence du point d'interrogation. Certains élèves sont étonnés par la question puisque la facture contient déjà le prix total de 63 euros, de plus, ils pensent que « la machine ne se trompe jamais ». Il s'ensuit un « débat » en lien avec les expériences et le vécu de chacun.

Il existe un milieu-problème puisque l'élève doit répondre à la question de l'exactitude de la facture. Pour cela, il lui faut s'emparer du problème et une réponse imprécise ne peut être acceptée. Le nombre d'objets n'est pas très important (4 objets sont compris dans la liste). Cependant, les nombres pour les prix de chaque objet contraignent l'élève à rechercher une stratégie. Nous regardons les nombres. Ils sont les suivants : 32, 5, 16 et 2. La difficulté de l'addition réside dans les unités (2 + 5 + 6 + 2 forment un autre dix). Ensuite, l'autre difficulté se trouve dans la comparaison entre le prix total inscrit sur la facture (63 euros/montant erroné) et le prix réel à calculer (55 euros). Les deux nombres 63 et 55 sont assez proches.

Généralement, l'étude de la facture commence à l'oral avant la réalisation des calculs. Elle permet de poursuivre l'élaboration de la compréhension de l'objet « question » mais surtout elle « anticipe » la conceptualisation sémantique particulière, le sens que l'élève va accorder aux nombres obtenus. L'élève relie l'objet et le prix puis il cherche dans son vécu une situation similaire/familière.

Par exemple sur la facture, nous voyons qu'un stylo coûte 32 euros. Lors de la rédaction, un élève décide que cela doit correspondre à un stylo-plume. Ensuite, un autre lui répond qu'il a acheté un stylo-plume bien moins cher dans grand magasin. Puis, c'est au tour d'un autre élève de prendre la parole pour affirmer qu'il s'agit d'un stylo-plume avec un mine en or. En fait, l'élève commence à cerner l'objet et/ou à établir un rapport spécifique à l'objet « question d'un énoncé mathématique ». Par exemple, l'élève copie le mot livre et s'exprime : « Un livre coûte 16 euros, c'est beaucoup ? » Un autre élève fait la même chose avec le journal à 2 euros et dit « combien coûte le journal ? ». C'est un élève qui lui répond « 2 euros ». Un autre élève dit « oui, c'est possible mais c'est trop cher ». Pour terminer, un autre élève s'exprime : « Alors, tu crois que cela coûte combien ? ».

Ces questions ne sont pas notées par le professeur sur le tableau, elles viennent spontanément. Si personne ne répondait, le professeur renverrait au groupe et demanderait toujours « Est-ce que c'est bien une question ? ». Le professeur n'en dit pas plus pour l'instant. C'est une appropriation personnelle de la liste nécessaire par chaque élève pour tenter de penser les calculs avec une conceptualisation sémantique particulière. Les élèves discutent donc sur toutes sortes de questions liées à la facture. Nous présentons ci-dessous deux productions afin de développer davantage notre propos : un exemple de production issu du Journal du Nombre de Gwena avec des productions de génération 1, 2 et 3.

Essai 3 : les calculs « attachés » à la liste (production de génération 1)

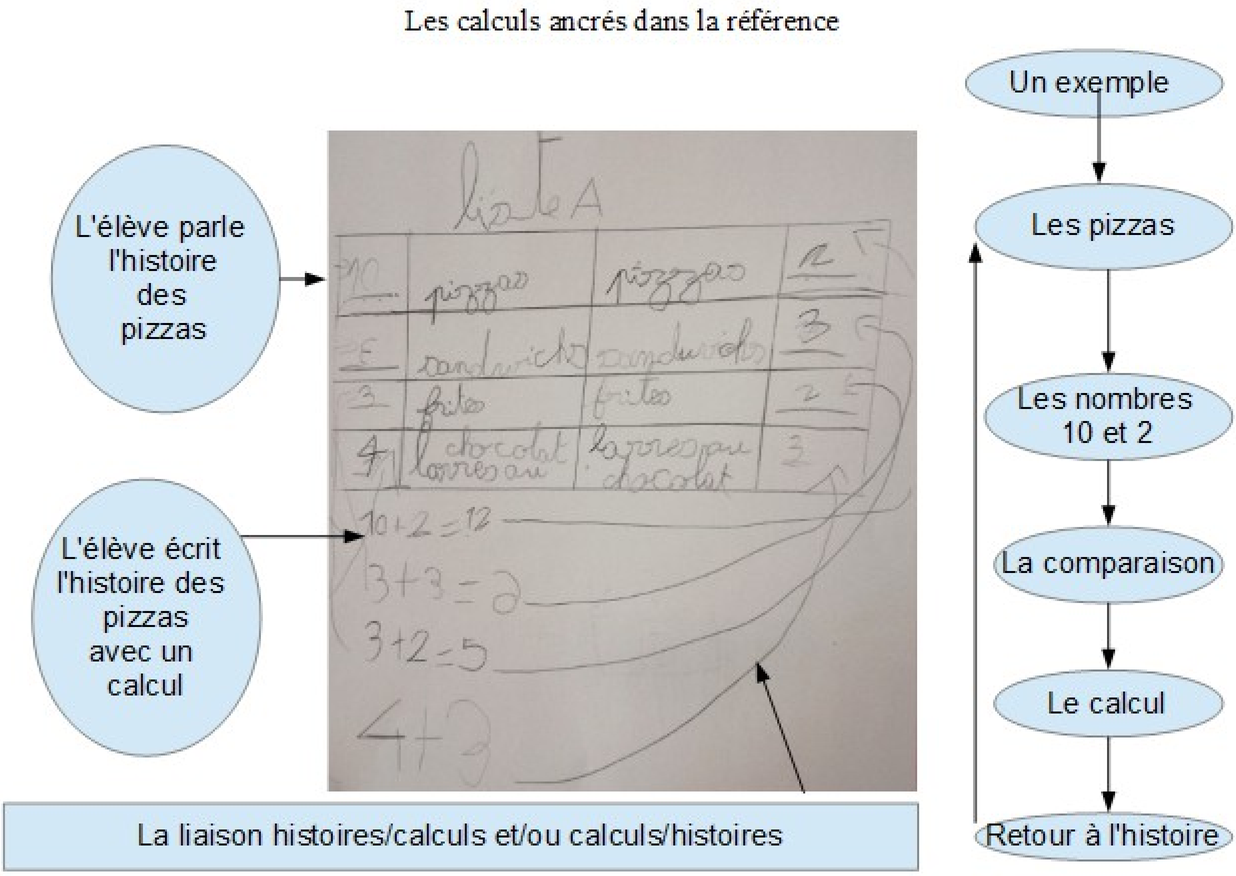
Nous avons vu que l'élève contextualise les calculs-problèmes qu'il écrit dans le Journal du Nombre. Nous avons observé dans les productions d'élèves des calculs/problèmes répétitifs (avec des petits nombres). Nous avons pensé que l'élève entre principalement par le calcul sans référence particulière et notamment avec des calculs connus (mémorisés) ce qui a motivé l'installation du travail en cours. Le professeur fait une autre remarque.

Afin de produire les calculs/problèmes, l'élève utilise les nombres sans se soucier de l'endroit où ils sont écrits dans les listes ou encore de ce que les nombres représentent. Généralement un nombre important d'élèves semble penser d'abord le problème à partir des calculs connus puisque lors de la mise en commun, lorsqu'un élève place le Journal du Nombre sous le visualiseur, il éprouve des difficultés à « raconter » en mots l'histoire calculée ou/et la retrouver. Observons comment l'élève va se comporter dans la nouvelle situation.

Le professeur décide alors de faire produire une liste avec toujours deux colonnes et les mêmes objets pour chacune des listes mais où le professeur conduit, guide la comparaison par l'observation de chaque famille d'objet et par des questions du genre, au sein d'une facture portant sur les pizzas, « Combien de pizzas dans la liste A ? », « Combien de pizzas dans la liste B ? » « Où y a-t-il le plus de pizzas ? (liste A ou B » « Combien y a-t-il de pizzas en plus/en moins dans la liste ... ».

Pour notre exemple de pizzas, l'enjeu est d'aider à organiser les calculs à partir d'une référence particulière en travaillant les énoncés « combien de plus », « combien de moins » (pour la comparaison intra-colonnes) puis combien en tout existe-t-il d'objets dans une même famille. Dans le Journal du Nombre de Gwena, que nous présentons ci-dessous, l'élève compare le nombre de pizzas. Elle écrit les calculs-problèmes puis rappelle ce qu'elle vient de chercher par un lien (une flèche) sur la production.

Nous décrivons les objets présents dans les deux listes A et B ci-dessous. L'élève a oublié de noter « liste B ». Il y a des pizzas, des sandwichs, des frites et des carrés de chocolat. Les nombres de la listes A sont les suivants : 10, 3, 3 et 4 et ceux de la liste B sont : 2, 3, 2 et 3. Les calculs-problèmes liés aux listes sont : 10 + 2 = 12 (les pizzas), 3 + 3 = 6 (les sandwichs), 3 + 2 = 5 (les frites) et 4 + 3 dont la somme n'est pas inscrite dans le Journal du Nombre (oubli ?). Chaque calcul-problème est relié par une flèche double aux pizzas liste A et aux pizzas liste B dont elles racontent l'histoire. Un calcul va porter à discussion, tout en étant vrai (3 + 2 = 5), C'est le nombre de frites. Le nombre 5 frites font penser à cinq parts de frites mais non à 5 frites. Cela ne représente pas la même quantité.

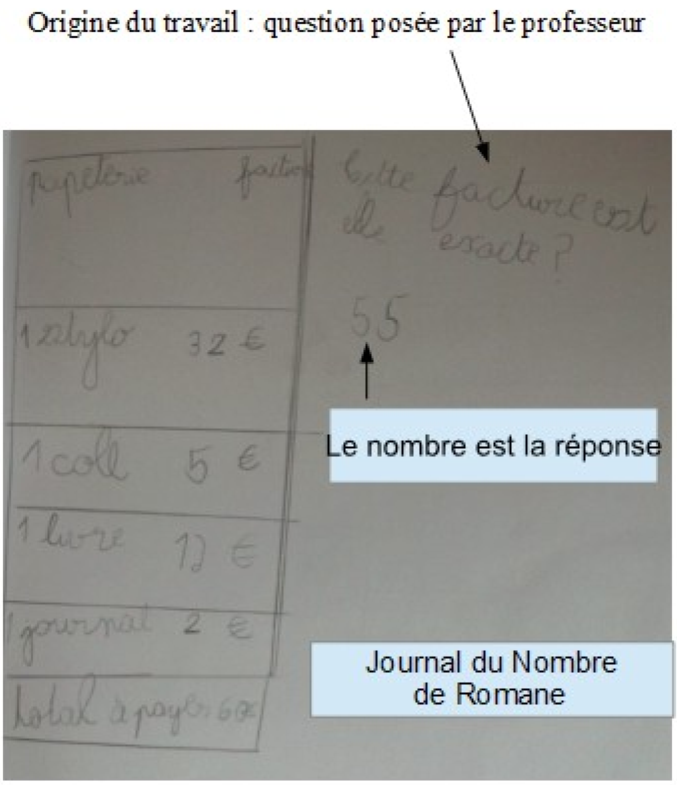


Le calcul des pizzas (le nombre 12) peut fonctionner pour une grande tablée.

Photographie n°67 : l'histoire du calcul relié à l'objet (Journal du Nombre de Gwena)

Date, le 23 mai 2013

Essai 4 : l'appropriation de la facture (production de génération 2)



Photographie n°68 : la facture (Journal du Nombre de Gwena)

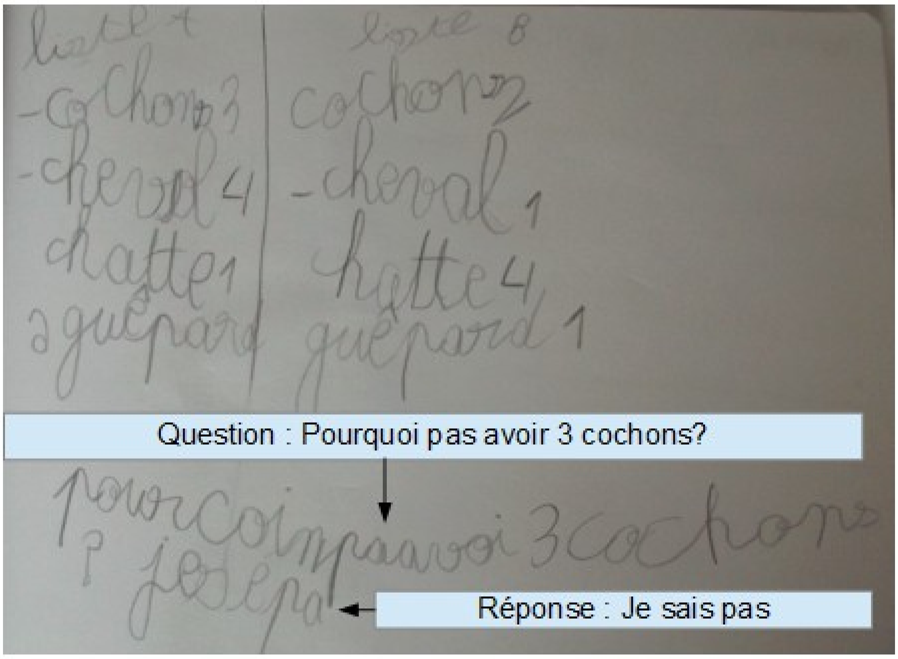
Date, le 22 mai 2013

Dans la facture ci-dessus, l'élève a noté la question : « cette facture est-elle exacte ?» Il a répondu par le montant exact de la facture, le nombre 55.

Les élèves sur des temps informels « s'amusent » à produire des tickets, des factures ou poursuivent la production de listes. Le travail sur les listes ci-dessous nous semble intéressant parce qu'il fonctionne comme une facture avec la pose d'une seule question (cf ; « Cette facture est-elle exacte ? »L'élève utilise les connaissances « anciennes » (construites précédemment avec les listes) pour élaborer de nouvelles connaissances sur l'objet « question » et le rapport spécifique à cet objet.

Essai 5 : la première question (production de génération 3)

Les premières listes avec une question et une réponse, le Journal du Nombre de Romane



Photographie n°69 : la question pourquoi (le Journal du Nombre de Gwena)

Date, avril 2013

La question commence par « pourquoi » et comprend un point d'interrogation (?). Ensuite, l'élève répond qu'elle ne sait pas. Il semblerait que l'enjeu de la construction d'un rapport spécifique à l'objet « question » se réalise puisque l'élève, ici, ne recherche plus des questions dont il connait assurément la réponse.

Encore une fois, nous soulignons la nécessité d'accorder du temps afin de permettre l'emboîtement des connaissances et laisser l'élève travailler dans sa durée d'apprentissage.

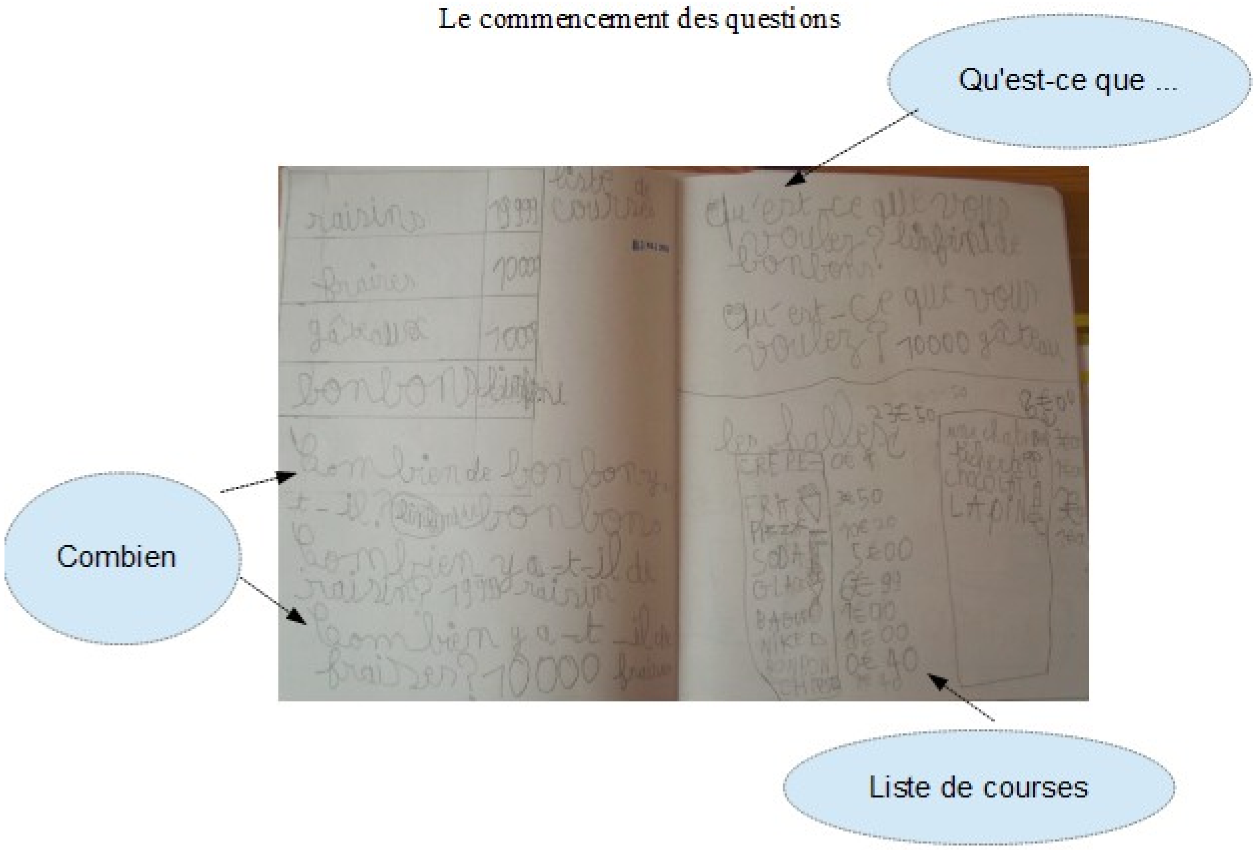
1.2 Le travail sur les énoncés

Nous donnons à voir, dans cette section, différents travaux produits pour le travail sur les énoncés de problèmes. Pour montrer l'emboîtement du travail des factures avec les questions, nous explorons la double-page du Journal du Nombre de Patrick. Ensuite, nous retraçons la chronologie de l'élaboration de la mise en situation de l'élève comme producteur de ses propres énoncés et nous terminons par une page entière d'énoncés du Journal du Nombre réalisée en fin d'année scolaire. L'enjeu est de rendre concret la somme de connaissances acquises par l'élève dans la situation où il est en capacité de produire ses propres énoncés. Nous rappelons que les énoncés se sont construits sur un temps, agrémenté de situations qui « anticipent » la production d'énoncés (voir ci-dessus les travaux sur les listes et les factures).Nous allons tenter de montrer qu'en fin d'année que tous les élèves (élèves avancés et moins avancés) produisent des énoncés de problème avec des « capacités différentes » et nous rechercherons dans les productions écrites les traces des progrès en lien dans la construction du nombre. C'est ce que nous allons voir ensemble maintenant.

1.2.1 Les différentes types de questions

La double-page du Journal du Nombre de Patrick va nous permettre d'expliciter l'emboîtement du travail sur les listes et les factures avec le travail sur les énoncés. Le travail sur les listes a permis à l'élève de construire un rapport générique puis spécifique à l'objet « question ». Le travail sur les factures lui a fait prendre conscience du lien entre les calculs et la référence (les histoires). Ce lien contraint l'élève à devoir penser la situation à partir d'une conceptualisation sémantique particulière. Observons, comme il est annoncé, la double-page du Journal du Nombre de Patrick.

Essai 1 : un système hybride entre la liste et la facture

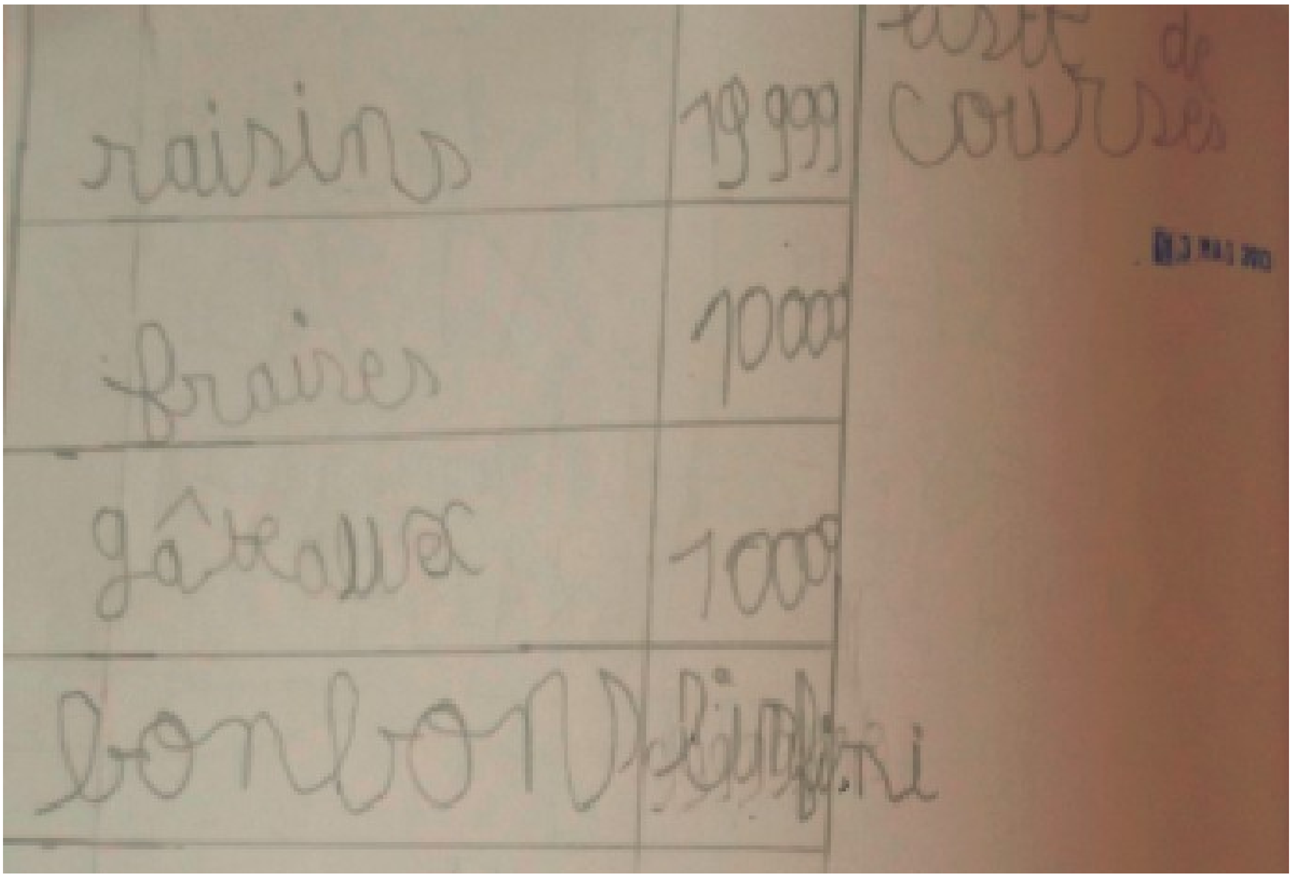


Photographie n°70 : la double-page du Journal du Nombre de Patrick

Date, le 13 mai 2013

Premièrement, l'élève a constitué une liste de courses. Elle comprend quatre objets et quatre quantités. Nous agrandissons la liste ci-dessous.

Essai 1 : extrait 1, un système hybride entre la liste et la facture



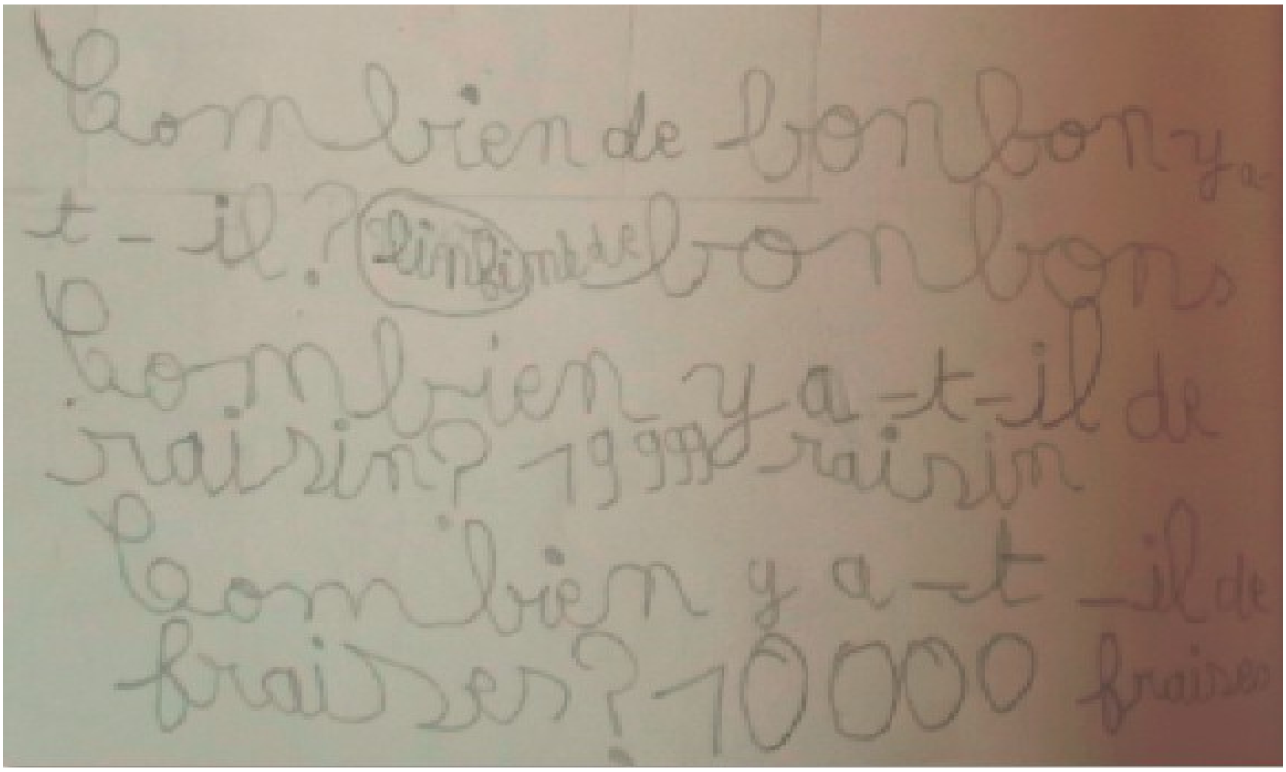
Photographie n°71 : un système hybride entre la liste et la facture

Date, le 13 mai 2013

Pour l'instant, cet écrit nous apprend, outre que l'élève est un gourmand, qu'il choisit des nombres très grands comme 10 000 et « l'infini » mais surtout qu'il a intégré l'objet « liste », dans sa nature et son genre puisqu'il sait constituer une liste (la forme apprise) et lui donner les caractéristiques de sa fonction. De plus, les quatre objets choisis appartiennent réellement à une liste de course mais ce qui reste discutable concerne l'ordre de grandeur des nombres.

Pourquoi disons-nous qu'il s'agit d'un système hybride entre la liste et la facture ? Le travail sur les listes produisait des calculs qui n'étaient pas forcément pensés avec une référence particulière. Quant au travail sur les factures, par le montant, il apportait les premières questions. Ici, sur la production étudiée, nous voyons des questions et des réponses qui sont, en fait, une relecture de la liste de course. L'élève tente une appropriation des informations contenues dans la liste de course (il prélève les informations d'un tableau, pourrions-nous dire). Nous agrandissons à nouveau la partie des questions de la double page.

Essai 1 : extrait 2, un système hybride entre la liste et la facture


combien de bonbon y a-t-il ? linfinitde bonbons
combien y a-t-il de raisin ? 19999 raisin
combien y a-t-il de fraises ? 10000 fraises

Photographie n°73 : un système hybride entre la liste et la facture

Date, le 13 mai 2013

Nous reproduisons les trois premières questions écrites par Patrick dans le Journal du Nombre :

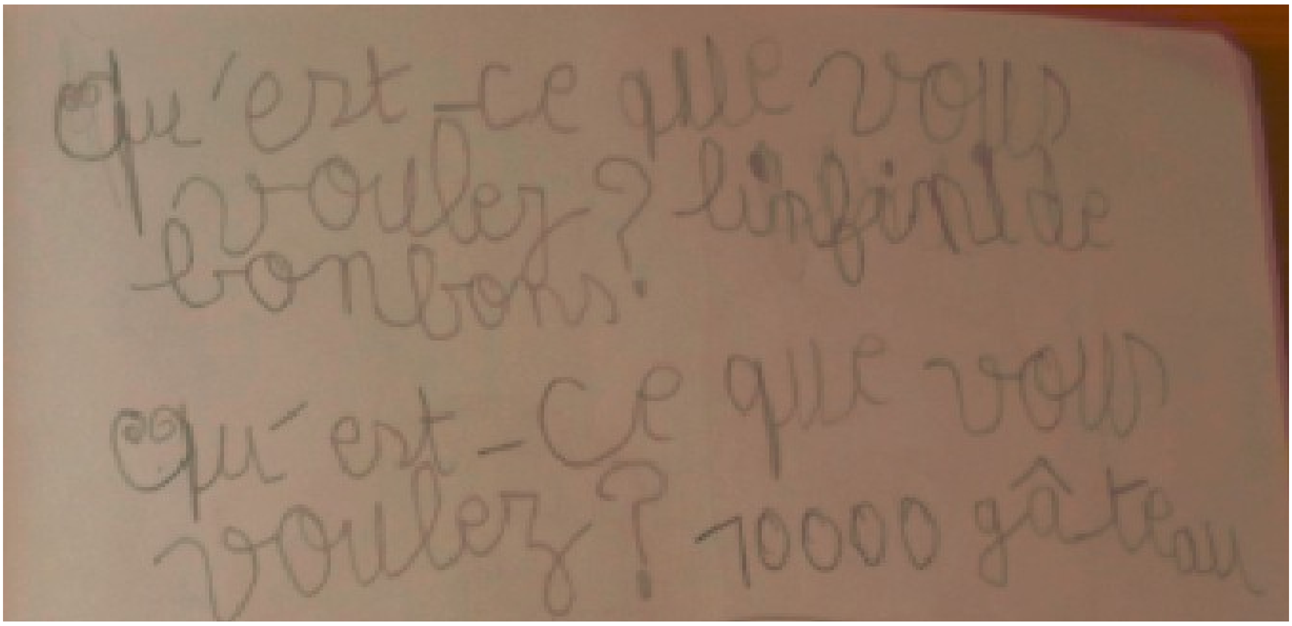
« Combien de bonbons y a-t-il ? » L'infini de bonbons.

« Combien y a-t-il de raisins ? » 19 999 raisins.

« Combien y a-t-il de fraises ? » 10 000 fraises.

Les questions sont construites avec le mot introducteur « combien » et se terminent par la présence du point d'interrogation (?). La réponse comprend le nombre inscrit dans la liste de courses et le nom de l'objet. Patrick semble penser les questions à partir d'une référence particulière puisqu'il ne reprend pas l'ordre des objets de la liste (1-raisins, 2-fraises, 3-gâteaux, 4-bonbons = ordre de la liste). L'ordre des questions est le suivant : bonbons, raisins, fraises, bonbons, et gâteaux. La première question concerne le nombre de bonbons. L'élève a produit deux autres questions que nous montrons ci-dessous.

Essai 1 : extrait 3, un système hybride entre la liste et la facture



Photographie n°74 : un système hybride entre la liste et la facture

Date, le 13 mai 2013

Comme on le voit ci-dessus, Patrick a écrit.

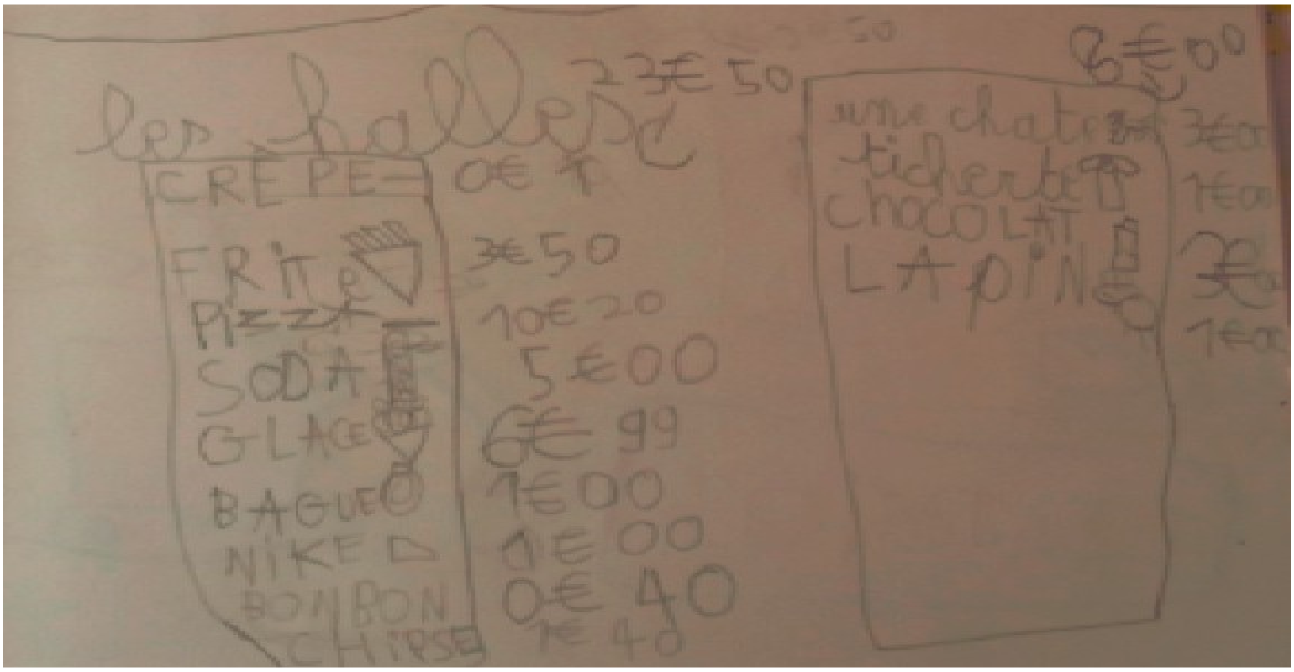
« « Qu'est-ce que vous voulez ? » L'infini de bonbons.

« Qu'est-ce que vous voulez ? » 10 000 gâteaux.

Ces questions ne commencent plus avec « Combien » mais par « Qu'est-ce que ... ». Elles concernent à nouveau les bonbons mais aussi les gâteaux. Chaque nom d'objet (raisins, fraises, gâteaux et bonbons) a fait l'objet d'une question, seul l'objet « bonbon » a généré deux questions. La classe s'est interrogée sur la réponse « l'infini de bonbons » avec la réaction de Christophe. Un débat s'est engagé sur : « Pouvait-on dire que l'infini était un nombre puisqu'on ne pouvait pas dire combien c'était exactement ni le représenter ? ». La question n'a pas été tranchée.

L'élève termine son travail par la représentation de tickets que nous montrons ci-dessous.

Essai 1 : extrait 4, un système hybride entre la liste et la facture



Photographie n°75 : un système hybride entre la liste et la facture

Date, le 13 mai 2013

Les deux « tickets de course » proposés par Patrick comprennent les objets et les prix en euros. C'est à partir de ce travail d'hybridation que semble, selon nous, commencer le véritable travail sur les énoncés de problèmes et premièrement la problématisation des questions.

1.2.2 Le débat autour des intitulés de questions

Une question mathématique est-elle une question ordinaire ? Toutes les questions fonctionnent-elles avec un énoncé de mathématiques ?

La production de questions a généré des questions auxquelles la classe ne savait pas répondre. Par exemple, lors de la lecture d'un énoncé, Marthe a dit « seul celui qui a fait le problème peut répondre ou peut-être le professeur... ». Il existe donc des questions auxquelles il est difficile d'apporter une réponse parce qu'elles n'ont pas de question ou bien parce que cette dernière est trop générale ou trop vague. Il se peut également que la classe ne dispose pas des connaissances nécessaires à un temps t des apprentissages pour le faire. Les élèves découvrent les questions qui n'en sont pas. Il y a aussi les questions avec « qu'est-ce qui ... », ou encore avec « pourquoi ... ». On peut se demander si ces questions sont bien des questions mais le débat porte essentiellement sur la possibilité de répondre et comment.

Les élèves ont aussi repéré l'existence de questions auxquelles on répond par un mot dans lesquelles se trouve la catégorie des réponses avec le groupe des « oui ou non ». Il s'agit de questions qui ne sont pas directement en lien avec le milieu-problème. Ils ont également identifié les questions auxquelles on répond par un nombre et qui commencent souvent par « combien ».

Certains élèves ont noté la présence du point d'interrogation qui représente la question - mais cela suffit-il ? D'autres élèves ont précisé leur désaccord en relation avec leur vécu dans le module *Calcul mental*. Dans ce domaine de ACE, lorsque l'élève ne connaît pas un nombre ou un calcul, il a la possibilité d'inscrire un point d'interrogation ou une croix dans la fiche de calcul. Le point d'interrogation ne signifie peu-être pas toujours une question. Cela a donné lieu a un mini-débat parce qu'un groupe d'élève résistait sur le fait que le point d'interrogation indique toujours un doute, une recherche.

Puisque l'élève est placé en capacité d'être le propre producteur de ses énoncés, nous assistons à l'émergence d'une autre question. Dans le Journal du Nombre, la question notée et formulée demande une réponse. Un nombre important d'élèves est interrogatif puisque l'auteur de l'énoncé connaît et sait la réponse (ceci reste toutefois à vérifier mais l'élève pense connaître la réponse de son énoncé et n'éprouve pas toujours la nécessité d'y répondre). Cette réponse doit-elle figurer dans le Journal du Nombre ? Les élèves produisent des questions.

Maintenant, nous pensons à la poursuite de l'agencement du milieu, ceci afin de permettre une pratique et une étude des énoncés de problèmes pour tous les élèves avancés et moins avancés. Pour l'avancée du temps didactique et de l'enseignement/apprentissage, l'enquête devra intégrer les énoncés individuels puis par l'action conjointe favoriser l'enrichissement de l'enquête collective. C'est l'enjeu que nous nous donnons.

Du temps est laissé aux élèves pour écrire dans le Journal du Nombre des énoncés de problèmes. L'agencement du milieu est pensé pour aider à faire progresser l'élève-auteur de l'énoncé et la classe -réactrice, celle-ci est également productrice d'énoncés en temps t + 1.

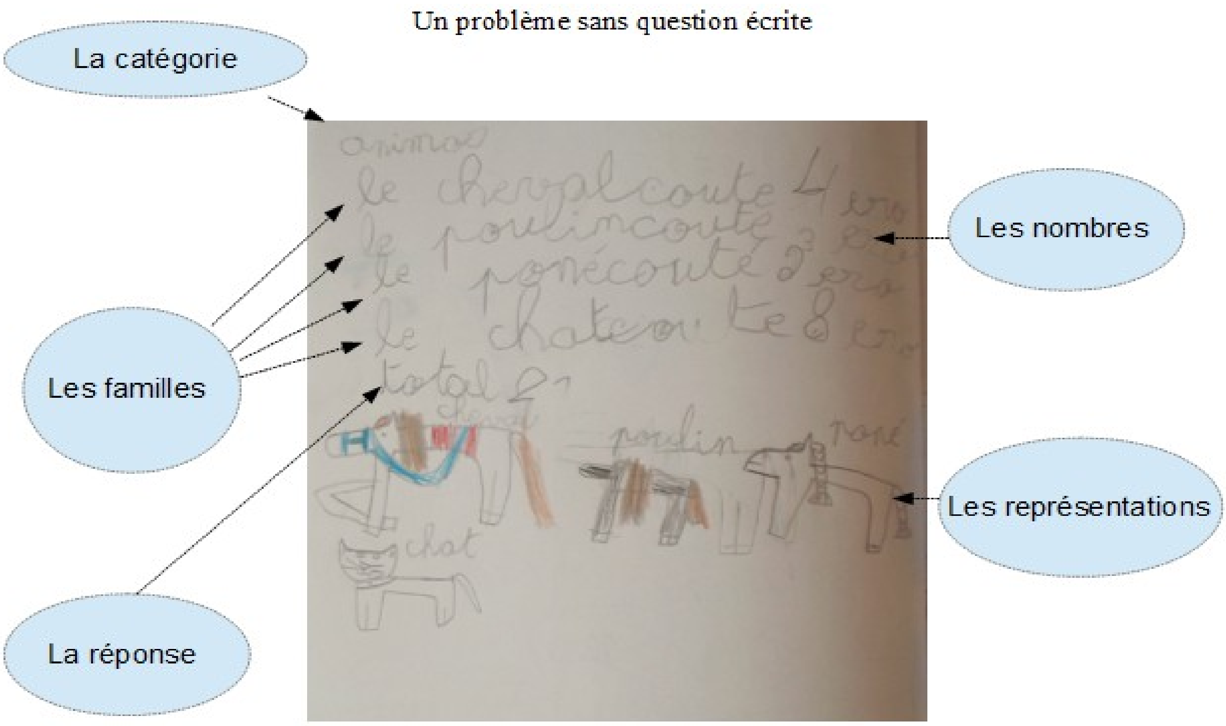
2.3 Les énoncés produits par les élèves

Le travail ci-dessous, issu du Journal du Nombre de Gwena, a été lu à l'ensemble de la classe. Gwena s'est déplacée près du tableau et a lu l'énoncé du problème à tous les élèves. Le professeur s'est assuré de la compréhension du travail par un débat sur les attentes de l'activité. Il a été ainsi entendu que chacun viendrait à des temps différents lire un des énoncés produit dans le Journal du Nombre.

Le dispositif état alors organisé selon les modalités suivantes. L'auteur de l'énoncé ne devait surtout pas lire la réponse. Il se contentait de lire l'énoncé puis l'élève devait laisser un peu de temps aux autres élèves pour réfléchir. Lorsque des mains se levaient, l'auteur de l'énoncé interrogeait. Si la réponse proposée par l'élève interrogée était la même que celle notée sur le Journal du Nombre de l'auteur de l'énoncé, il validait la réponse apportée sinon il invalidait. En cas de refus, la classe pouvait demander une relecture de l'énoncé. En cas de désaccord, un débat s'établissait. Il était aussi défendu de porter un jugement de valeur sur l'énoncé du type « C'est bien, c'est nul » mais il était possible et même souhaitable de rechercher les améliorations pour les futurs écrits de tous. Nous présentons un des tous premiers énoncés produit par Gwena et lu à la classe. Regardons ensemble cet énoncé de problème.

2.3.2 Une question implicite et l'absence de la question écrite

La production ci-dessous comprend la catégorie avec le mot « animaux » et ensuite quatre phrases formées de la même structure : le nom de l'animal avec le verbe coûte et le prix. L'énoncé se termine par le mot « total ».



Photographie n°76 : une question implicite du Journal du Nombre de Gwena

Date, juin 2013

L'énoncé est constitué de petits nombres comme 4, 3, 6 et 8. Il s'agit d'une famille de chevaux avec un cheval, un poulain et un poney. Le dernier animal est un chat.

L'auteur a lu son énoncé et la classe ne répondait rien, ne participait pas (pas de mains levées). Le professeur s'empare alors de la parole et demande à Gwena d'interroger un élève de la classe. Elle choisit de solliciter Patrick qui répond que « sans la question, il ne savait pas ce qu'il fallait chercher ». D'autres élèves surenchérissent et demandent à leur tour ce qu'il fallait chercher puisqu'il n'y avait pas de question. L'auteur de l'énoncé n'est pas d'accord. Elle regarde son Journal du Nombre et répond au groupe : il faut chercher « le total/combien ça coûte ». Pour l'élève-auteur, il était évident que le problème portait sur la recherche du coût de l'ensemble puisque dans chaque phrase il y a le mot « coûte ». Pour le reste des élèves, cela n'était pas aussi évident. Ils n'étaient pas d'accord. Ils répondaient : « tu ne l'as pas dit. » Certains élèves avançaient que la question pouvait concerner le nombre d'animaux en tout dans le problème. Gwena a dit : « C'est beaucoup trop facile ». Finalement, ils se sont mis d'accord que cet énoncé ne comportait pas vraiment de question.

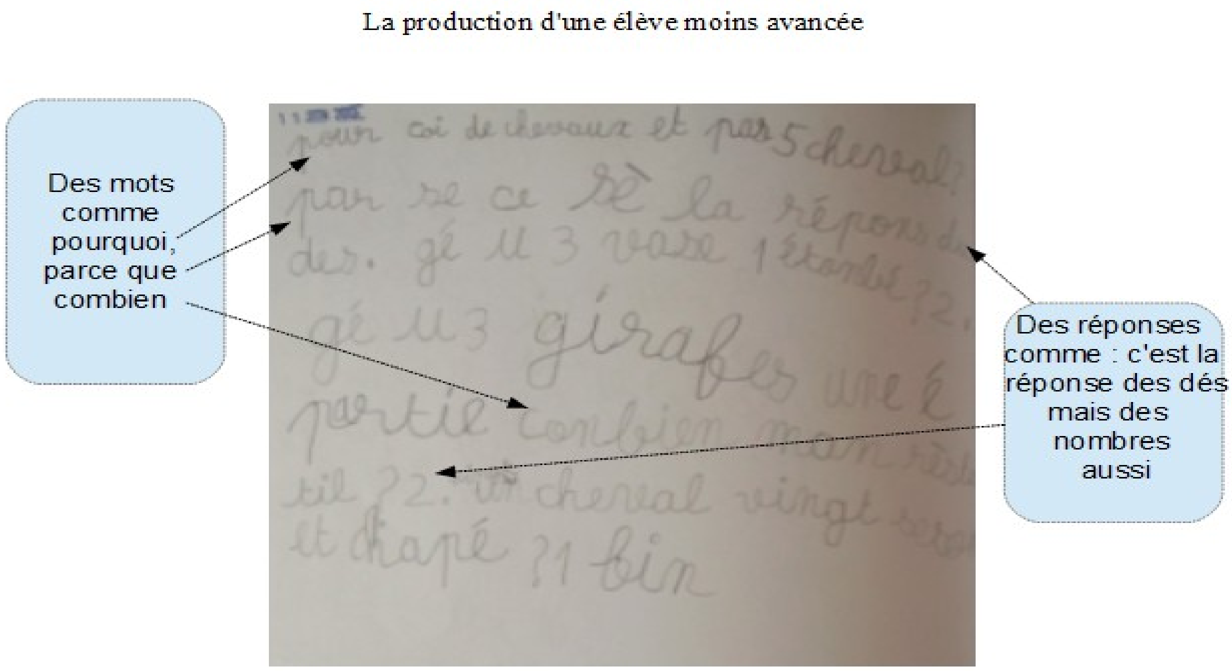
Il y eu également des énoncés invalidés parce que le contexte n'était pas plausible. Par exemple, Aude a lu un problème avec des poissons et un requin dans son aquarium. Le requin mangeait un certain nombre de poissons. La question portait sur le nombre de poissons restant dans l'aquarium. La classe a refusé de répondre avec le motif que Aude ne pouvait pas avoir un requin dans son aquarium. Patrick a dit : « C'est beaucoup trop gros. Comment l'aurais-tu attrapé ? » Aude a essayé de résister en disant : « Je peux le ramasser sur la plage ou mieux le pêcher dans la mer ». La classe n'a pas voulu de ce problème parce qu'il semblait impossible.

Nous poursuivons avec quatre énoncés produits par Aude dans le Journal du Nombre.

2.3.3 Même les élèves moins avancés produisent des énoncés de problèmes

Sur la photographie ci-dessous se trouve ces quatre énoncés écrits par Aude dans le Journal du Nombre. La production date du 11 juin 2013 (donc à la fin de l'année scolaire).

Essai 1 : une élève moins avancée produit des énoncés de problèmes



Photographie n°77 : des énoncés de problème produits par une élève moins avancée (le Journal du Nombre de Aude)

Date, le 11 juin 2013

Nous reproduisons les quatre énoncés de la photographie (cf. la production de Aude ci-dessus) :

Le premier énoncé : pourquoi des chevaux et pas 5 chevaux parce que c'est la réponse des dés.

Le second énoncé : j'ai eu 3 vases 1 est tombé ? 2

Le troisième énoncé : j'ai eu 3 girafes une est partie combien m'en reste-t-il ? 2

Le dernier énoncé : vingt et un cheval vingt se sont échappés ? 1 fin

On note peu de ponctuation dans les énoncés orignaux mais plusieurs fois la présence du point d'interrogation qui remplace et signifie la question-problème.

Nous constatons que les trois premiers énoncés concernent des petits nombres compris entre 1 et 5. Deux énoncés sont élaborés à partir de la structure « J'ai eu ... » et le suivant contient le mot inducteur « pourquoi ». Le quatrième énoncé est d'une autre nature par la grandeur des nombres utilisés mais sa résolution est simple parce que l'élève enlève « presque tout » (21 – 20).

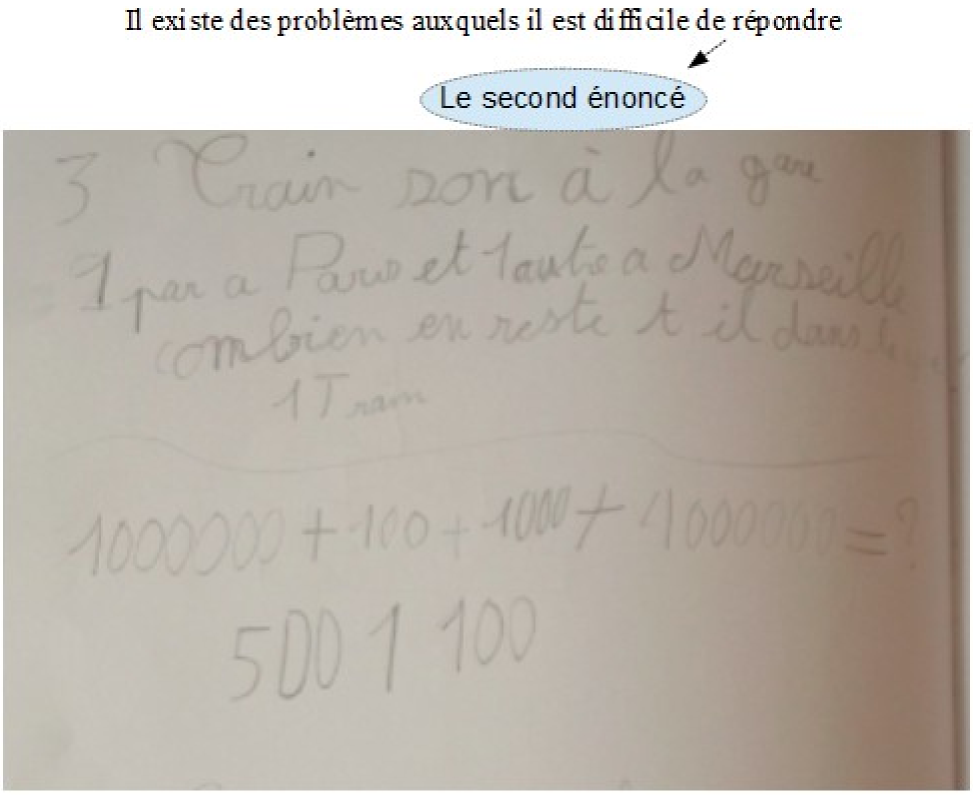
Pour l'analyse de la production elle-même, nous dirions que l'élève produit des énoncés avec de très petits nombres comme si la stratégie consistait à se « rassurer » dans un espace numérique maîtrisé puisqu'elle doit déployer beaucoup d'énergie dans la structure du problème (pour penser puis écrire le problème). Ensuite, avec des petits nombres en fin d'année scolaire, l'élève veut gagner et assure le gain. La phrase-question qui termine l'énoncé est très souvent absente, sauf pour le troisième problème avec les girafes (combien m'en reste-t-il). La question est souvent remplacée par le point d'interrogation comme nous l'avons évoqué, elle se trouve directement derrière celui-ci. Seul le premier énoncé et sa réponse semblent « mystérieux » mais l'élève a utilisé le mot « pourquoi ». Les tournures de phrases sont évocatrices avec les expressions « J'ai eu ... » et « Combien m'en ... ». L'élève a un rapport très personnel avec les énoncés de problèmes.

Ce qu'il nous semble essentiel de questionner, c'est le fait qu'elle joue au jeu demandé par le professeur, comme les autres élèves de la classe : il est possible d'y jouer mieux mais elle reste dans le jeu.

2.3.4 Des problèmes sans réponse à un temps t des apprentissages

La production suivante appartient à un élève avancé, Jean-Louis. Elle comporte deux énoncés de problèmes avec une histoire de trains et une grande opération.

Essai 1 : les problèmes ne sont pas toujours des énoncés



Photographie n°78 : l'existence de problème que la classe ne sait pas résoudre pour l'instant (Journal du Nombre d'Jean-Louis)

Le premier énoncé écrit par Jean-Louis est le suivant : 3 trains sont à la gare. 1 part à Paris et 1 autre à Marseille. Combien en reste-t-il dans la gare ? Un train

Le second problème produit correspond à une opération avec quatre termes et de très grands nombres : 1 000 000 + 100 + 1000 + 4 000 000 = ? 500 1 100

L'élève utilise, lui aussi, les petits nombres pour le premier énoncé. Ce n'est pas le cas pour le second énoncé. La production se distingue ou se différencie par la structure du problème. Aude travaille avec les petits nombres et il y a une seule relation (une seule transformation) dans le problème. Rappelons-en l'énoncé : « j'ai eu 3 vases et 1 est tombé ? 2 ».

Jean-Louis, lui, travaille avec les petits nombres mais il existe plusieurs relations (plusieurs transformations). Voici l'énoncé : « 3 trains sont à la gare. 1 part à Paris et un autre à Marseille. Combien en reste-t-il à la gare ? 1 train » Le nombre 3 subit deux transformations l'une à la suite de l'autre. Dans le problème de Aude, le nombre 3 ne rencontrait qu'une seule transformation.

La quantité d'écrit (pour chaque énoncé de problème) est aussi différente dans les productions des deux élèves. Les énoncés de Aude sont « dépouillés », mais ils restent composés de l'essentiel. L'énoncé d'Jean-Louis détaille davantage la situation et il formule la question-problème.

Le second problème proposé par Jean-Louis est de nature différente. Le problème n'a pas besoin d'une situation puisqu'il s'agit d'un long et grand calcul (une suite de grands nombres) composé de nombres très importants. Il s'agit d'un problème mais il ne représente pas un énoncé de problème constitué par des mots.

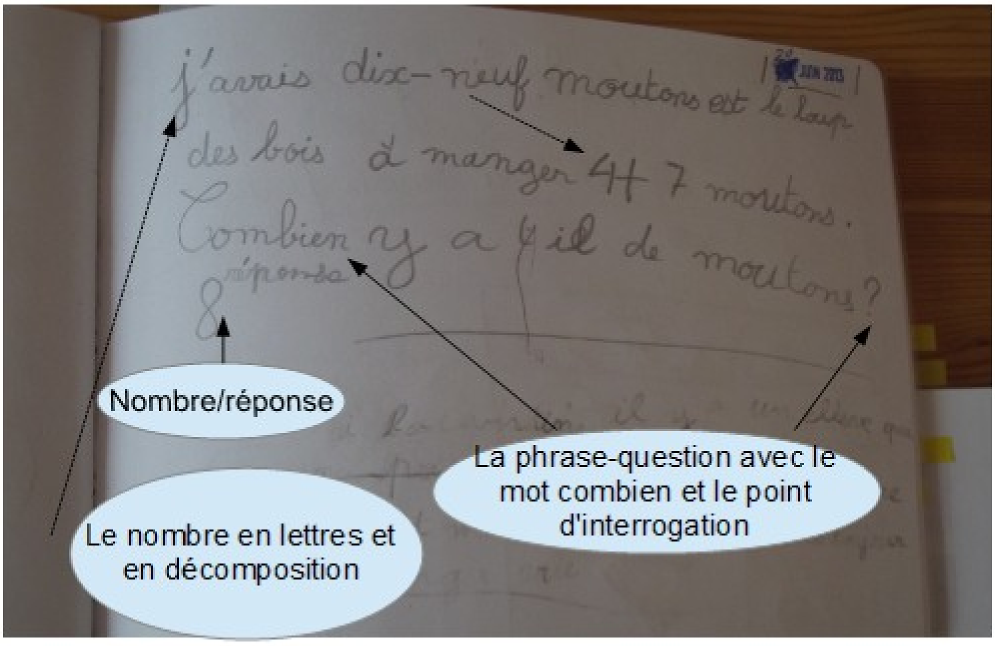
2.3.5 Un énoncé de problème pour montrer l'élaboration du nombre

La production qui suit nous raconte l'histoire d'un « loup des bois ».

Que nous apprend la production suivante sur la compréhension du nombre par l'élève auteur de l'énoncé ? Lorsque nous observons ce travail d'élève, nous notons que le texte (l'énoncé) est constitué de deux phrases dont l'une est la question-problème. La situation décrite est explicite. L'élève précise être détentrice de dix-neuf moutons. La transformation est apportée par le loup des bois qui mange des moutons évidemment, comme dans toutes les histoires de loup et de moutons, (enfin presque).

La structure du problème connaît deux transformations dans le nombre de moutons mangés. Il est fourni par la décomposition 4 + 7 (c'est plus que dix). La recherche demande d'effectuer un premier calcul qui concerne le nombre de moutons réellement mangés. Pourtant, le problème n'est pas terminé. La question posée est la suivante « Combien y a-t-il de moutons ? » L'élève répond 8 dans le Journal du Nombre. La réponse attendue est bien le nombre de moutons qui n'ont pas été mangés par le loup des bois, c'est-à-dire à la fin de l'histoire. La formulation de la question-problème interroge la classe parce que le nombre de moutons est connu dès le départ. L'élève explique qu'elle parle de la fin, après le passage du loup. C'est la diffusion de l'énoncé du problème à l'ensemble de la classe qui fait prendre conscience à l'élève et aux autres élèves de l'implicite contenu parfois dans les productions d'écrits.

Essai 1 : un problème de loup



Photographie n° 79 : la construction du nombre dans le Journal du Nombre d'Aurore

Date, le 20 juin 2013

L'élève semble disposer de plusieurs représentations pour le nombre. Elle écrit dix-neuf en lettres et la réponse huit en chiffres (8). Elle propose un nombre de moutons mangés sous la forme d'une décomposition (4 + 7) pour le nombre 11. Le problème proposé par Aurore est la recherche de 19 – 11 = 8. L'élève pourrait formuler l'énoncé de problème ainsi : « j'ai 19 moutons et le loup des bois a mangé 11 moutons. Combien y a-t-il de moutons (non mangés) ? »

La recherche du calcul serait-elle plus facile avec cette dernière structure ? Dans l'énoncé d'Aurore, l'élève qui ne calcule pas le nombre 11 pour la décomposition 4 + 7 « a perdu » même si l'enjeu du problème lui est accessible. Ensuite, il ne doit pas oublier de calculer 19 – 11. L'élève doit donc maîtriser le résultat d'un calcul intermédiaire qui conditionne la recherche du nombre de moutons mangés. Le nombre d'erreurs potentielles semble augmenter avec ce type de structure de problème. Dans l'énoncé « retravaillé » éventuellement, l'élève peut organiser le calcul sur les unités directement puisqu'il existe une dizaine dans les deux nombres 19 et 11. Le calcul revient alors à 9 – 1 = 8. Lors du débat, Aurore expliqua à la classe qu'elle voulait faire un problème « difficile à résoudre » d'où la question sur le nombre de moutons qui reste et non sur le nombre de moutons mangés par le loup.

Une lecture sommaire de l'énoncé peut donc orienter la recherche sur les moutons mangés qui ne sont que le calcul intermédiaire mais non pas la solution au problème. Le nombre de moutons mangés (4 + 7) fait bien partie de la recherche mais l'élève ne doit pas arrêter l'étude à cet endroit-là ou à ce premier résultat obtenu.

3. BREFS ÉLÉMENTS DE DISCUSSION

Les énoncés de problèmes ont besoin de beaucoup de temps. Ils sont à envisager, selon nous, sur l'ensemble de l'année scolaire. Ils demandent une progression spécifique puisque les élèves de cours préparatoire sont en apprentissage toute l'année pour la lecture-écriture. Le travail à l'oral et de la représentation placent l'élève comme producteur-débutant de ses propres énoncés de problèmes assez rapidement dans le déroulement de l'année scolaire. L'élève produit d'abord des listes puis des énoncés en relation avec la compréhension et la connaissance des nombres et des relations qu'il possède à un temps t des apprentissages. Ces travaux d'élèves fournissent au professeur des connaissances de la compréhension du nombre de la classe (de l'avancée collective) et des élèves (par l'observation des productions individuelles). Le travail sur les listes et les factures semble permettre à l'ensemble des élèves de progresser par le partage des connaissances sur l'objet « question » même si le production d'énoncés (la rédaction de problèmes) n'est pas encore l'objet central des situations mises en place. C'est par la mise en débat que se consolide la compréhension et l'enseignement/apprentissage.

Nous poursuivons l'analyse du travail des énoncés de problèmes avec des productions effectuées lors de l'année 1 (2012/2013). Nous commençons par quelques extraits d'énoncés puis une page du Journal du Nombre rédigés en complète autonomie par les élèves.

4. LA PRODUCTION D'ÉNONCÉS

Les élèves se situent maintenant dans la production même d'énoncés puisque les situations précédentes les ont préparés par différentes explorations de l'objet « question ». Elles ont rendu les élèves producteurs de listes, de factures et de systèmes hybrides comportant différentes questions. Elles ont aussi permis le développement de l'autonomie par la dévolution d'un milieu puisque les élèves se sont emparés des questions de recherche. Ils ont cerné différentes réalités de l'objet « question » et se préparent à produire des énoncés. Nous pouvons dire que les élèves ont été orientés et se sont orientés dans le milieu-problème. Les élèves sont, selon nous, en capacité de produire de petits énoncés qu'ils vont proposer à la classe. C'est ce que nous allons montrer à partir d'extraits de quelques Journaux du Nombre. Ces travaux sont produits en fin d'année scolaire et nous semblent représentatifs de l'élaboration du Nombre atteint par les élèves de cours préparatoire avec la recherche ACE menée durant toute l'année scolaire.

Pour les besoins de l'analyse, nous avons sélectionné six productions d'élèves. La première production d'Jean-Louis (Essai 1 ci-dessous) nous permettra d'évoquer le dispositif mis en place lors de la production d'énoncés, suivra la production de Patrick (essai 2) avec un élément « intrus » dans l'énoncé. Nous poursuivrons avec Michelle (Essai 3) et ses deux types d'énoncés. Nous reviendrons à Jean-Louis (Essai 4) et Patrick, (Essai 5) avec une production comportant un énoncé spécifique d'une double transformation et l'autre, l'élaboration de la relation addition-soustraction. Cette section se terminera sur une page du Journal du Nombre de Michelle (Essai 6) comprenant cinq énoncés, réalisés le 20 juin 2013.

4.1 Le dispositif pour la production d'énoncés

Afin d'aider les élèves moins avancés et « petits lecteurs », la situation mise en place démarre avec une modalité de travail en binôme. La classe choisit conjointement la catégorie à utiliser (par exemple, les élèves décident de produire des énoncés de problème avec les animaux). Le professeur précise que si l'élève rencontre une difficulté orthographique, il ne doit pas s'arrêter. L'élève doit

chercher alors à écrire à partir des sons qu'il connaît déjà et/ou en comparaison avec des mots connus et mémorisés. La classe discutera de l'orthographe du mot ensuite. L'enjeu est de produire un problème et sa réponse. Il sera lu à la classe. Le binôme dont la réponse est en adéquation avec l'énoncé lu, vient à son tour au tableau. Il lit le nouvel énoncé de problème produit.
Pour la production écrite, le professeur limite le temps afin de garder un moment important de débat (lors du retour du groupe). Il prévient que si tous les énoncés ne peuvent être lus. ceux-ci seront aussi étudiés sur des temps informels (avant la cantine, avant la fin de la journée...) ou lors d'une autre séance.
Les élèves sont très productifs. Le professeur a dû faire évoluer le dispositif d'origine. En particulier, les élèves demandaient à écrire des énoncés de problème lorsqu'ils avaient terminé un travail. Ils désiraient lire les énoncés produits.
Chaque lecture enrichit la classe et procure des idées à chacun. Le professeur a donc décidé de placer une boîte à problème dans la classe où chaque élève peut ajouter un problème quand il le veut. L'élève écrit l'énoncé de problème sur un petit bout de papier. Il y note aussi la réponse. Une fois terminé, l'élève glisse le tout dans une enveloppe sans oublier d'inscrire son nom sur celle-ci. L'ajout du nom est important puisque lors de la lecture et de la recherche des problèmes, le professeur ou un élève pioche une enveloppe dans la boîte. Elle est rendue à l'auteur de l'énoncé pour une lecture « collective ». Parallèlement, il y eu des séances de « production d'énoncés sur le Journal du Nombre ». Les extraits analysés sont issus de ces dernières séances.

4.1.1 Les énoncés de problème de la séance du 11 juin 2013

Pendant deux semaines, la classe a reçu deux professeurs-stagiaires en formation. Le travail sur les énoncés a connu une pose.

La séance du 11 juin 2013 est une séance « retour » sur les énoncés.

Lors de l'incitation productive collective, le professeur et les élèves mènent l'enquête sur les contraintes d'un énoncé.

Pour cela, le professeur choisit d'utiliser trois dés pour désigner trois nombres. La classe commence à sélectionner les catégories, Marthe propose les « vases », Jean-Christophe les « lions » et Aurore les « chevaux ». Le professeur hésite puisqu'il attendait trois catégories plus larges comme les objets, les animaux et les personnes mais il « laisse passer ». En fait, la classe se retrouve avec deux catégories thématiques génériques, les animaux et les objets la catégorie des animaux comportant les lions et les chevaux.

Ensuite, un élève vient lancer le dé sous le visualiseur. Ce dé présente deux fonctions : il connote une catégorie sémantique, et réfère à un nombre.Ainsi, le dé jaune lancé par Jean-Louis est associé aux « vases » avec le nombre 5. Le dé orange concerne les « lions » et le nombre 3. Le dernier dé, le dé rouge, est relatif aux « chevaux » et au nombre 2.

Il est important de souligner que ces contraintes ne sont pas des contraintes exclusives. Elle peuvent être enfreintes puisqu'elles existent pour aider, guider l'élève moins avancé mais elles ne doivent pas restreindre les explorations. En cas de non respect des contraintes, le travail produit doit tout de même rester dans le jeu demandé.

Le contrat de production est donc le suivant : l'élève doit donc inventer une histoire avec au moins une des données présente au tableau dans laquelle figure la question avec la réponse. Les élèves se mettent au travail pendant que le professeur écrit la date sur les Journaux du Nombre avec le tampon-dateur.

Les différents travaux présentés ci-dessous vont nous aider à caractériser les choix réalisés par les élèves afin d'opter pour certaines stratégies . Nous nous fixons sur l'analyse des nombres et des structures. Pour chacune des productions qui suivent, nous donnons d'abord une photographie de la production elle-même, puis nous recopions le texte de la production, avant l'analyse elle-même.

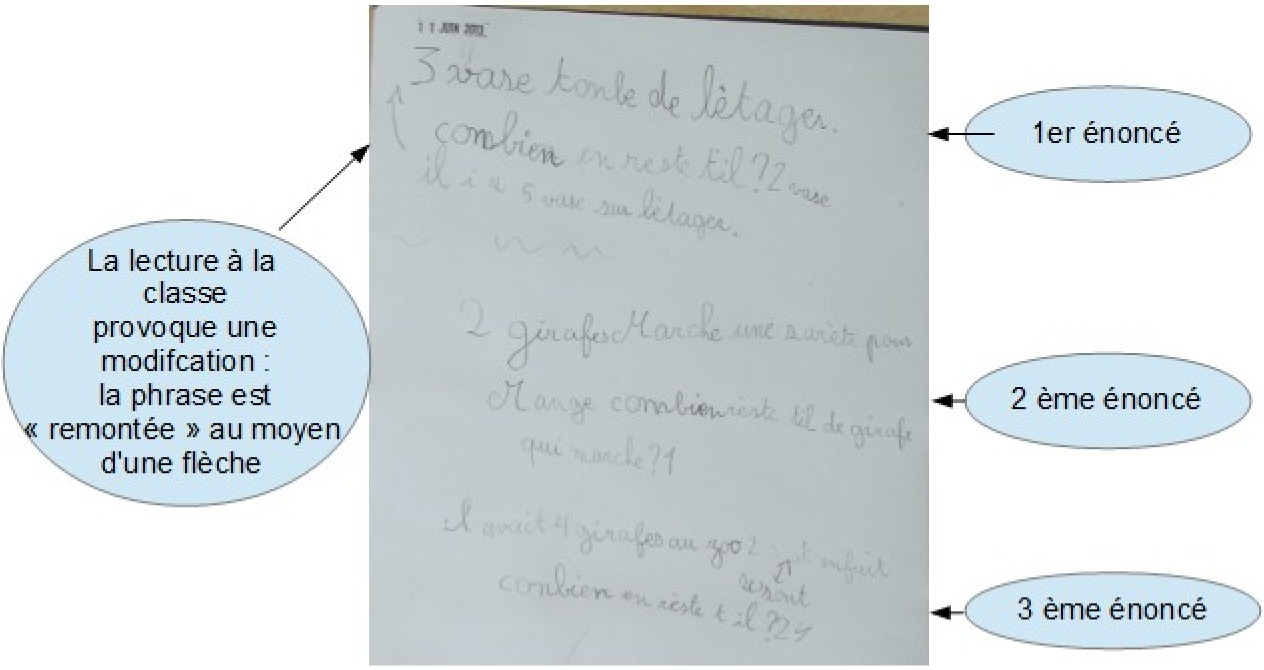
4.1.2 Le retour du groupe sur les énoncés de problème

Nous nous sommes interrogés sur la lecture systématique à la classe de l'énoncé produit et quant aux apports de cette lecture « collective ». Notre hypothèse est que l'écrit individuel d'un élève devrait permettre à tous d'approfondir l'enquête et de poursuivre la compréhension d'un énoncé de problème de mathématique.
Tous les élèves, avancés et moins avancés, trouvent-ils des avantages à pratiquer ce « jeu » ? Pour répondre à cette question, nous nous servons des travaux d'Jean-Louis (Essai 1, énoncé 1 avec les vases), de Patrick (Essai 2, l'élément « intrus ») et de Michelle (Essai 3, énoncé 5 avec les caméChristophes). Les trois élèves sont plutôt des élèves avancés qui s'expriment facilement en classe.

Nous commençons par envisager la production d'Jean-Louis (Essai 1 ci-dessous) dont le premier énoncé, nous allons le voir, commence directement par une transformation négative, suivie ensuite de la question correspondante. Jean-Louis termine l'énoncé par la situation de départ.
Face à l'étonnement du groupe-classe devant cette structure peu ordinaire, il prend conscience que quelque chose ne fonctionne pas dans son écrit. Il relit silencieusement son énoncé, et trace une flèche à la fin de l'échange, comme nous allons l'analyser.

Essai 1 : la lecture au groupe provoque une modification dans l'énoncé de l'élève-auteur

Trois énoncés de problèmes produits [redacted] dans le Journal du Nombre



Photographie n°80 : trois énoncés du Journal du Nombre d'Jean-Louis C
Date, le 11 juin 2013

3 vases tombent de l'étagère.[8] Combien en reste-t-il ? 2 vases Il y a 5 vases sur l'étagère.
2 girafes marchent une s'arrête pour manger. Combien reste-t-il de girafe qui marche ? 1
Il avait 4 girafes au zoo 2 se sont enfuies. Combien en reste-t-il ? 2
Copie de la production d'Jean-Louis

Les trois énoncés d'Jean-Louis ont des nombres ≤ 5. Chaque énoncé de problème travaille avec un trio de nombres (3/2/5), (2/1/1) et (4/2/2). Chaque problème illustre une transformation négative traduite par la question « Combien reste-t-il ? ». Il existe deux catégories différentes dans les énoncés produits : les objets et les animaux.

La production d'Jean-Louis nous apprend qu'il considère sans doute que les problèmes de retrait sont des problèmes « difficiles » à solutionner. Peut-être pense-t-il que la classe pourrait être en questionnement plus longtemps ? Jean-Louis identifie probablement les problèmes de transformation négative comme plus ardus même pour lui-même. Cela semble entrainer le choix

8 Afin de faciliter la lecture des énoncés produits par les élèves, nous avons pris le parti de les reproduire selon les normes orthographiques usuelles.

conjoint de travailler avec de très petits nombres (≤ 5). Nous pensons que l'élève choisit un espace numérique qu'il connaît et dont il maîtrise les relations entre les nombres.
Jean-Louis fait donc le choix d'user de tous les nombres présents sur le tableau (5, 3 et 2) et obtenus par les lancés de dé mais il se contente d'une seule catégorie (les « vases »).
Comme nous l'avons précisé ci-dessus, Jean-Louis a produit un premier énoncé « atypique » qui commence par la transformation, suivie de la question. Il termine l'énoncé par la situation de départ.
3 vases tombent de l'étagère.
Combien en reste-t-il ? 2 vases
Il y a 5 vases sur l'étagère.

Devant l'étonnement du groupe-classe, il prend conscience que quelque chose ne fonctionne pas dans son écrit. Il relit silencieusement son énoncé, et à la fin de l'échange, il trace une flèche.
Nous donnons ci-dessous un court transcript des échanges, qui précise le fonctionnement

Tdp 73, E (Anita) : ha mais on sait pas combien qu'est-ce qui y avait avant dans /dans/ c'est pas le nombre-tout/on savait/en fait/madame V/on savait pas ce qui avait/combien de vases qui étaient dans l'étagère/
Tdp 74, P : alors/c'est vrai/ le professeur montre l'écrit de l'énoncé sur le tableau/*trois vases tombent de l'étagère/il faudrait qu'il continue sa phrase et qu'il dise et qu'il explique/*
Tdp 75, E (Anita) : qu'il y en avait 5
Tdp 76, P : ou alors/il en reste/peut-être que si/attendez/alors/peut-être que si il mettait/
Tdp 77, E (Alexandre) :j'ai une idée
Tdp 78, P : alors/vas-y/
Tdp 79, E (Alexandre) : ba en fait/si il met deux vase tombent de l'étagère/heu/et qu'il y en a trois/et ben après/il met combien en reste-t-il
*Tdp 80, P : ha oui mais/là/donc/là/on a bien une question/mais/on n'avait pas le nombre-tout/du départ/*Jean-Louis s'est emparé du feutre et ajouté une phrase au tableau/
Tdp 81, E (Patrick) : j'ai une idée comment on pourrait faire
Tdp 82, P : mais il pourrait transformer son problème/qu'est-ce qu'il aurait pu mettre Patrick
Tdp 83, E (Patrick) : 3 vases tombent de l'étagère/combien en reste-t-il 2/et/combien y en avait-il au tout début

L'échange nous paraît particulièrement intéressant à étudier, notamment dans le sens où il peut montrer comment différents élèves, qu'ils soient avancés ou moins avancés, s'engagent dans les transactions.
Le premier élève à réagir à « l'étrangeté » de l'énoncé (il manque le nombre de vases sur l'étagère au départ) est une élève moins avancée (Anita).

Tdp 73, E (Anita) : ha mais on sait pas combien qu'est-ce qui y avait avant dans /dans/ c'est pas le nombre-tout/on savait/en fait/madame V/on savait pas ce qui avait/combien de vases qui étaient dans l'étagère/

L'extrait nous montre que même dans une expression verbale parfois laborieuse, Anita est bien dans le jeu demandé.
Mais un élève avancé comme Patrick tire aussi intérêt des échanges puisqu'il propose à partir de l'énoncé d'Jean-Louis de rechercher le nombre-tout, qui est aussi un nombre de départ, dans une recherche délicate de l'état initial de la structure, par la question suivante :

Tdp 83, E (Patrick) : 3 vases tombent de l'étagère/combien en reste-t-il 2/et/combien y en avait-il au tout début

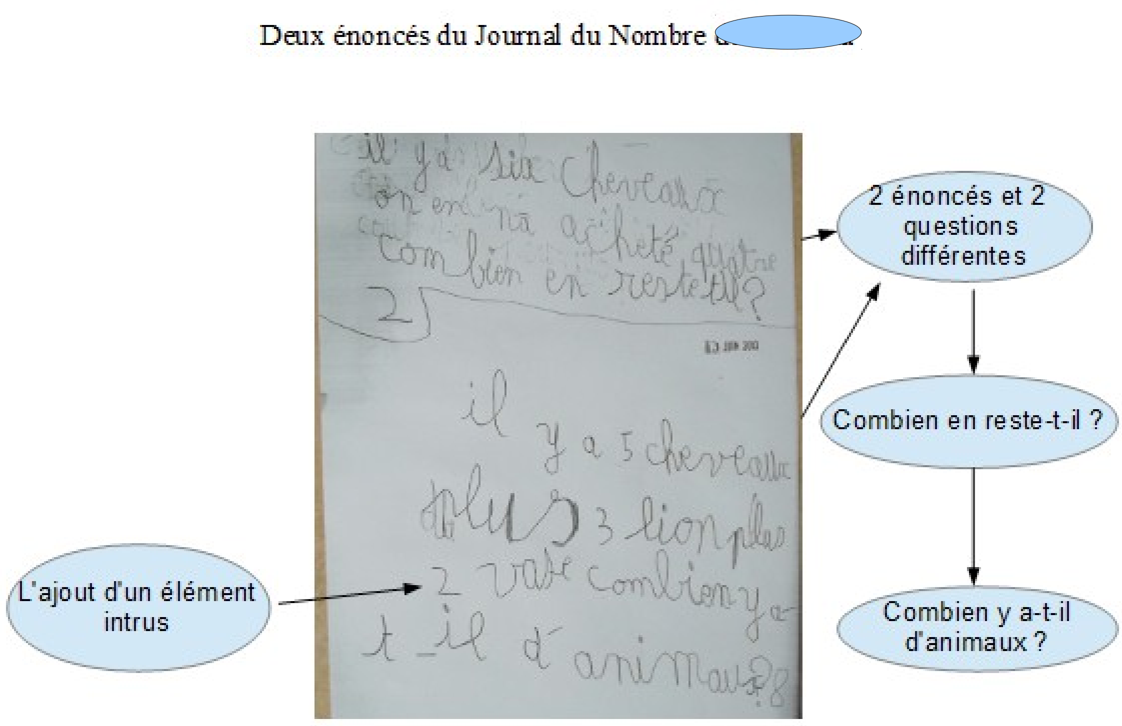
Quant au proposeur de l'énoncé, il écoute les échanges et modifie directement sur le tableau puisqu'il écrit. La suite des transactions montre en effet comment Jean-Louis finit par prendre en compte le retour de la classe sur sa production.

Tdp 99, E (Jean-Louis) :il y a 5 vases sur l'étagère/3 tombent de l'étagère/combien en reste-t-il/2 vases
Tdp 100, P :bon/il a écrit la même chose mais d'une autre façon/peut-être qu'on comprend mieux/
Tdp 101, E (Jean-Louis) : parce que j'ai juste/ il montre la flèche tracée

Dans le second énoncé, (2 girafes marchent une s'arrête pour manger. Combien reste-t-il de girafe qui marche ? 1), le nombre 2 est pensé avec la décomposition additive « 1 + 1 », dont Jean-Louis précise dans la question : « Combien reste-t-il de girafe(s) qui marche(ent) ? » Le mot « marche » est important au plan de la sémantique de l'énoncé. Le fait que la girafe s'arrête pour manger ne la fait pas disparaître.
Quant au troisième trio de nombres (Il avait 4 girafes au zoo 2 se sont enfuies. Combien en reste-t-il ? 2), il repose sur la mémorisation du double « 2 + 2 = 4 » que l'élève utilise pour construire l'énoncé de problème.
Comme nous en avons émis l'hypothèse, Jean-Louis veut construire des problèmes « durs » qu'il se représente par une structure de transformation négative, mais il veut aussi assurer le gain (par exemple pour ne pas « perdre la face » par rapport au groupe). Pour cela, il sélectionne dans ses connaissances les relations qu'il maîtrise parfaitement.
Considérons la stratégie de Patrick, autre élève avancé.

Essai 2 : Des questions différentes

La production de Patrick est réalisée à la même date (le 11 juin 2013). Nous allons voir que si elle utilise également des petits nombres, elle se différencie de la production d'Jean-Louis.



Photographie n°81 : deux énoncés du Journal du Nombre de Patrick
Date, le 11 juin 2013

Il y a six chevaux.
On en a acheté quatre.
Combien en reste-t-il ?
2

Il y a cinq chevaux plus trois lions plus 2 vases. Combien y a-t-il d'animaux ? 8
Copie de la production de Patrick

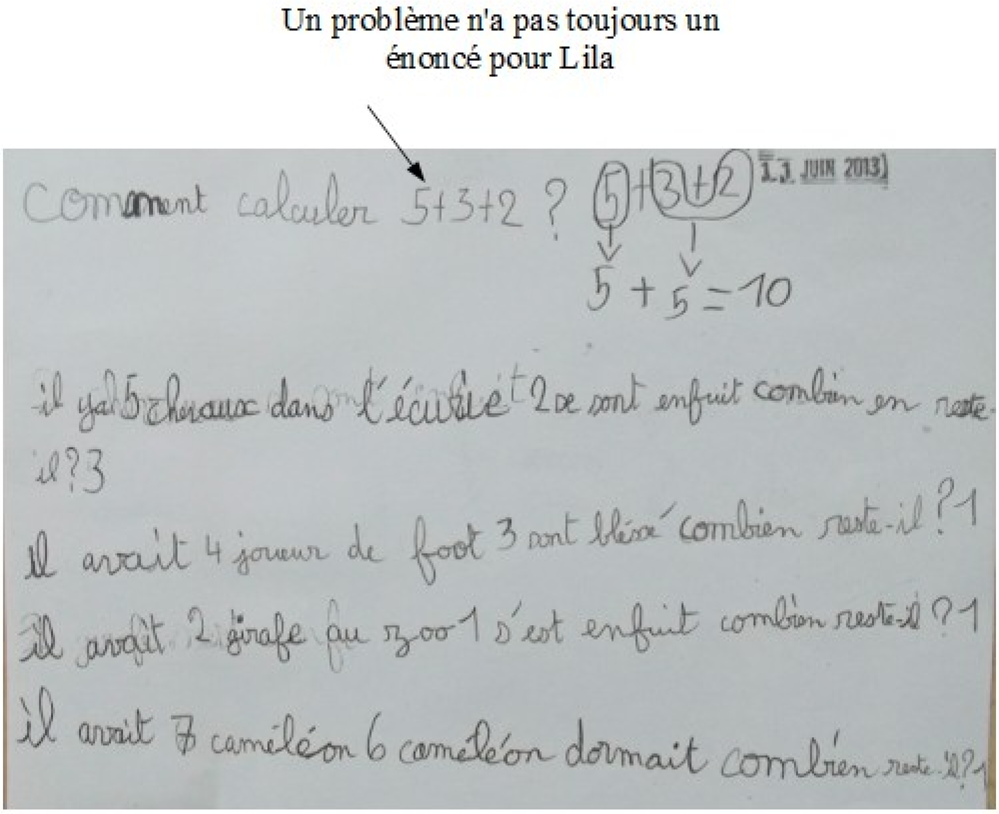
Les nombres en jeu sont toujours de petits nombres mais le domaine numérique a légèrement augmenté (10).
Le trio de nombres du premier énoncé est le suivant : 6, 4 et 2. Il repose sans doute sur la connaissance de la décomposition additive « 4 + 2 = 6 ».
Le second énoncé aborde aussi la connaissance du nombre 5 avec la décomposition « 3 + 2 » comme chez Jean-Louis mais il comprend l'introduction d'un nombre *intrus*, le nombre 2, qui réfère à des « vases », alors que la question porte sur des animaux.
Les deux énoncés sont de structure différente avec une transformation négative (énoncé 1) et une transformation positive (énoncé 2). Cela se traduit par deux formulations différentes : « Combien en reste-t-il ? » pour le premier énoncé, et « Combien y a-t-il d'animaux ? » pour le second.

Patrick ne joue pas avec la même stratégie qu'Jean-Louis et, lui aussi, il veut proposer à la classe des problèmes difficiles. Il pense « gagner » mais il n'utilise pas la même stratégie. Il cherche à différencier les structures de problèmes (transformation négative/transformation positive).
De plus, il ajoute un nombre « intrus » comme élément « piègeur » dans la recherche de la solution. Patrick sera le seul élève à utiliser tous les nombres et toutes les catégories.
Comme nous l'avons précisé, la situation fonctionne avec deux thématiques (les animaux et les objets), et la catégorie des animaux se divise en deux sous-groupes (les lions et les chevaux) ; dès lors, la création de l'énoncé peut s'envisager comme la recherche de la somme ou de la différence. La somme va concerner le nombre d'éléments contenus dans deux ou trois catégories. La différence peut consister dans la recherche du nombre d'animaux « en plus » ou « en moins » de telle catégorie (lions ou chevaux) mais également elle peut résider dans la comparaison des animaux avec les objets. Patrick construit son énoncé comme pour la recherche de la somme de tous les éléments du problème mais la catégorie « vases » a une fonction d'élément « piègeur » puisque le nombre 2 et la catégorie désignée « les vases » ne sont pas pris en compte dans le calcul par la question « combien y a-t-il d'animaux ? ».
Lorsque Patrick vient lire son premier énoncé à la classe (il y a six chevaux. On en a acheté quatre. Combien en reste-t-il ? 2), il en reçoit un retour signifiant.
En effet, avant que Patrick ne termine sa lecture, Jean-Louis s'exprime pour préciser que « cela ne va pas ». Patrick a lu son propre énoncé affiché sur le tableau (le Journal du Nombre est placé sous le visualiseur). Il est donc devant le TBI et il tourne le dos au groupe pour la lecture. Il cache en partie la question notée sur son cahier. Sur le film de la séance, nous voyons Patrick s'arrêter, suite à l'intervention d'Jean-Louis, et douter. Jean-Louis dit alors : « On ne peut pas mettre « combien reste-t-il ». Jean-Louis a donc anticipé la question à venir mais ce n'est pas la question inscrite sur le Journal du Nombre. Patrick rétorque : « Non, ça va pas ». Patrick pense s'être réellement trompé. Il réfléchit très vite. Il répond alors : « Mais je peux mettre combien d'animaux en tout ».
Ensuite, il s'aperçoit que cette proposition est la solution qu'il a choisie pour le second énoncé. Elle est déjà notée sur son cahier. Le professeur demande à Jean-Louis pourquoi il a dit que cela n'allait pas. Jean-Louis répond que Patrick était devant le tableau. La question n'était donc pas visible. Il pensait que la question posée serait « Combien reste-t-il ? ».
La difficulté semble être de réunir les trois catégories sous une détermination générique puisque le groupe « les vases » ne permet pas l'utilisation du terme « les animaux » comme grande catégorie (l'ensemble). Il semble que Patrick se soit interrogé sur cela puisqu'il écrit « Combien y a-t-il d'animaux ? » Ce n'est pas le nombre de catégories qui perturbe mais le déséquilibre 1 (les vases) contre 2 (les animaux avec les lions + les chevaux).

L'échange nous apprend aussi qu'Jean-Louis pensait utiliser toutes les catégories mais qu'il a rencontré un obstacle de compatibilité avec la question sous la forme de « Combien reste-t-il ? ».
Que va faire Michelle ?

Essai 3 : deux types d'énoncés

La production de Michelle se distingue de celle des deux garçons par l'écriture d'un nombre un peu plus important d'énoncés (5 contre 3 ou 2) mais surtout, par deux types d'énoncés : les énoncés avec une référence sémantique (animaux, personnes) et les énoncés sans référence sémantique (purement « arithmétiques »)



Photographie n° 82 : deux types de problèmes (Journal du Nombre de Michelle)
Date, le 11 juin 2013

Comment calculer 5 + 3 + 2 ? 5 + (3 + 2)
5 + 5 = 10

Il y a 5 chevaux dans l'écurie 2 se sont enfuis Combien en reste-t-il ? 3

Il y avait 4 joueurs de foot 3 sont blessés Combien reste-t-il ? 1
Il y avait 2 girafes au zoo 1 s'est enfuie combien reste-t-il ? 1
Il avait 7 caméChristophes 6 caméChristophes dormaient combien reste-t-il ? 1
Copie de la production de Michelle

Les nombres impliqués dans les cinq énoncés restent dans le domaine numérique ≤ 10.
Le premier problème est un énoncé d'un type particulier puisqu'il commence par une question suivie d'une opération. Il semble que l'élève recherche le groupement qui permette de calculer rapidement l'écriture additive. Elle repose sur la connaissance, sur le « savoir que » « 5 + 5 = 10 ».
Cet énoncé est à mettre en relation sans doute avec une question restée longtemps sur le tableau. A partir du dénombrement d'une grande quantité de cubes, les élèves avaient produit un groupement de 100 et un autre de 80. Le problème était le suivant 100 + 80 = ? Cela est resté assez longtemps au tableau tant que la certitude n'a pas été construite, notamment l'emplacement du chiffre 8 pour l'écriture le grand nombre. On peut penser que cette équation, restée longtemps en vue, a joué un rôle dans la genèse de la production de Michelle.

L'énoncé suivant (énoncé 2) concerne également le nombre 5 à partir de la comparaison de deux nombres 5 et 2.
L'énoncé 3, lui, concerne le nombre 4 < 5.
L'énoncé 4 reprend la décomposition « 1 + 1 ».
Le dernier problème (Il avait 7 caméChristophes 6 caméChristophes dormaient combien reste-t-il ? est une comparaison de deux nombres très proches (deux collections dont la valeur de l'écart est de un).
C'est le retour au groupe et la lecture de celui-ci qui provoquent sa modification au plan sémantique. En effet, à partir de la lecture de cet énoncé par Michelle, le groupe va inter-réagir à propos de la question. Michelle a produit un énoncé convenablement ordonné, mais elle pose la question : « Combien (en) reste-t-il ? ». Cette question n'est pas adéquate, puisque le problème lu parle d'un nombre de caméChristophes dont une partie *dort.* Puisque les animaux dorment, ils n'ont pas disparu et sont toujours là. La question ne fonctionne donc pas, et c'est la réception des élèves en tant que « lecteurs » du problème qui permet à Michelle de prendre conscience de cette inadéquation.

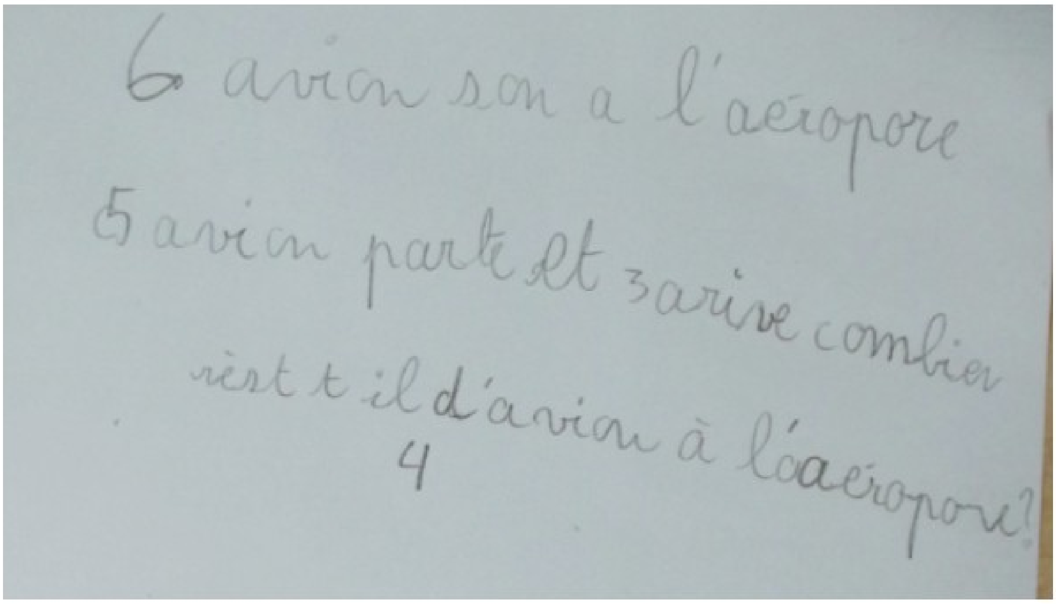
Au plan général de la composition des problèmes, Michelle adopte globalement une autre stratégie, qui consiste en une proposition de « nombreux » énoncés (5 énoncés contre 3 ou 2).
A part, le premier énoncé qui concerne le répertoire additif, que la connaissance de 5 + 5 permet de réaliser l'opération (5 + 3 + 2), les quatre autres énoncés commencent tous par « Il y avait ... ».
Michelle produit, on l'a vu, deux catégories d'énoncés, la catégorie sans référence sémantique (purement arithmétique) et la catégorie avec référence sémantique (les animaux, les personnes). Il existe trois thèmes : l'opération, les animaux, et les personnes.
Là encore, la contrainte d'écrire la réponse de l'énoncé du problème proposé à la classe implique fortement l'élève. Michelle choisit, elle aussi, de ne pas perdre. Pour cela, l'élève recherche dans les connaissances dont il a la maîtrise mais il pense aussi aux connaissances qui peuvent ne pas être en possession de certains élèves pour s'assurer une sorte de « gain » sur la classe.
L'énoncé 4 (Il y avait 2 girafes au zoo 1 s'est enfuie combien reste-t-il ? 1) va être mis en débat par Etienne.
Comme toujours, le professeur demande si l'énoncé est bien un problème. Cela permet aux élèves de rechercher les critères « attachés » au problème lu et de les formuler. Ainsi, les critères ne sont plus génériques mais ils deviennent spécifiques et dépendent de l'énoncé du problème. Le professeur recherche de cette façon l'élaboration d'un passage entre les critères génériques et

spécifiques.
Etienne va alors dire que l'énoncé 3 n'est pas un problème puisque « tout le monde sait cela ». Michelle soutiendra que le problème est vrai puisque 1 + 1, c'est 2 donc 2 – 1 = 1 et qu'il contient une question. Etienne affirmera : « justement tout le monde le sait donc ce n'est pas un problème ». Cet échange a finalement provoqué une tentative de classement des problèmes lus en « difficiles », « moyennement difficiles » et « faciles ».

Essai 4 : deux transformations dans un même énoncé

Revenons à une production d'Jean-Louis et aux énoncés élaborés avec une transformation négative.

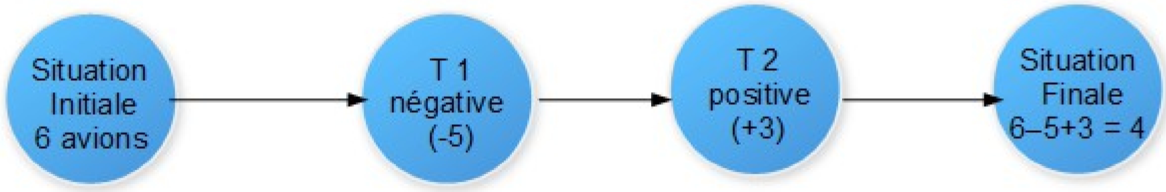
Des petits nombres et une double transformation



Photographie n°83 : une double relation (Journal du Nombre d'Jean-Louis C)
Date, le 11 juin 2013

6 avions sont à l'aéroport 5 avions partent et 3 arrivent combien reste-t-il d'avion à l'aéroport ? 4
Copie de la production d'Jean-Louis

Le domaine numérique dépasse de peu 5 (6). Les nombres présents dans l'énoncé sont 6, 5, 3 et 4. Il existe une double transformation, d'abord négative puis positive. Elles sont indiquées par l'emploi des verbes être (sont), partir (partent) et arriver (arrivent) qui indique la structure du problème que nous schématisons ci-dessous :



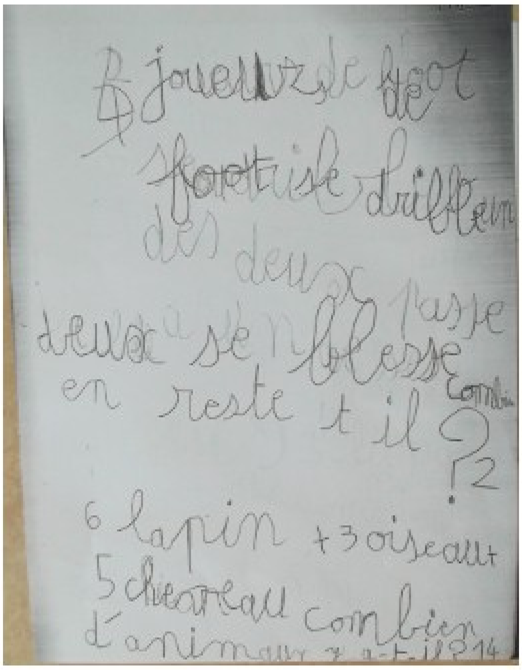
Schématisation de l'énoncé d'Jean-Louis
T1 : transformation 1
T2 : transformation 2

Jean-Louis semble rechercher toujours la difficulté puisque la première transformation est négative. L'énoncé de problème serait, selon nous, beaucoup plus facile à résoudre avec une transformation positive premièrement sous la forme 6 + 3 (le nombre d'avions présents puis arrivés à l'aéroport) suivie d'une transformation négative référant au nombre d'avions en partance (9 – 5 = 4).
L'énoncé a été produit à partir d'un contrat du même type que précédemment. Cette fois-ci, le professeur décide de trois lancés de dés réalisés par trois élèves mais les catégories sont libres. Jean-Louis utilise les trois nombres obtenus par lancer (6, 5 et 3) et toujours l'emploi de la question « Combien reste-t-il ? ». En fonction de ces trois nombres, il ne peut prévoir deux transformations négatives dans l'énoncé puisque le nombre le plus grand est 6 Le milieu-problème le contraint à penser à une transformation « mixte ». Jean-Louis choisit la transformation négative puis positive.

Nous allons voir dans l'essai suivant (Patrick, Essai 5) que l'élève choisit de respecter le contrat d'utilisation de tous les nombres pour l'énoncé 2 (utilisation de 6, 5, et 3) avec une seule catégorie. Pour cela, il pense à la relation « simple » de l'addition.

Essai 5 : l'addition et la soustraction, pensées conjointement

La relation addition et soustraction



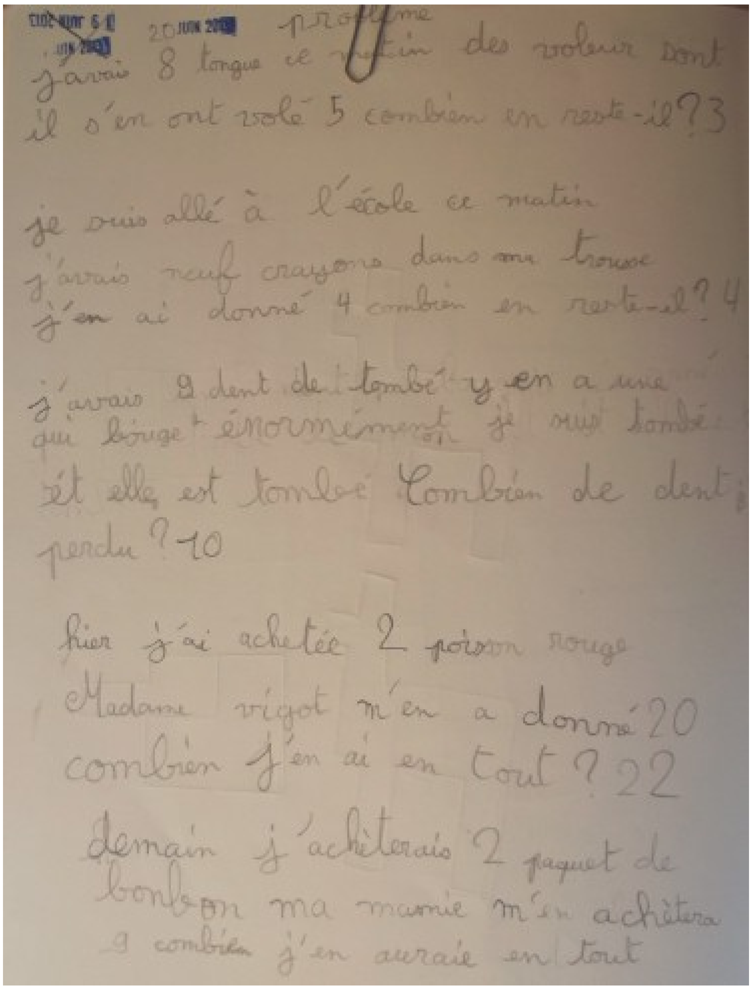
Photographie n°84 : deux énoncés du Journal du Nombre de Patrick
Date, le 11 juin 2013

4 joueurs de foot se dribblent deux se blessent combien en reste-t-il ? 2
6 lapins + 3 oiseaux + 5 chevaux combien d'animaux y a-t-il ? 14
Copie de la production de Patrick

Le premier énoncé est composé de nombres inférieurs à 5 et le second énoncé est formé d'une écriture additive de trois termes dont la somme est un nombre supérieur à 10 (14).
Patrick continue de mettre en œuvre la stratégie qui consiste à « varier » pour déstabiliser « l'adversaire » (la classe) par deux énoncés de structures différentes.
De plus, au sein du second problème, il s'engage dans les nombres « irréguliers » (> 10) pour l'énoncé 2 dans lesquels le dix ne « s'entend » pas. La somme des lapins et des oiseaux (6 + 3) ne permet pas d'atteindre le nombre 10. Ensuite, il reste le calcul de 9 + 5. L'élève peut calculer toutefois avec dix et additionner 10 + 5 = 15. Puis la connaissance que le nombre 9, c'est un de moins que le nombre 10 produit la réponse 14 et non 15. Mais il est tout à fait possible de procéder autrement. Cette fois-ci, l'élève part du nombre 9 et utilise les connaissances d'une des décompositions du nombre 5 « 1 + 4 = 5 ». Le calcul est le suivant 9 + 1 = 10 auquel l'élève ajoute le nombre 4 (10 + 4 = 14).

La production suivante (Michelle, Essai 6) est réalisée le 20 juin 2013. Les énoncés sont issus du Journal du Nombre de Michelle. Ils sont produits lors de séances « libres » où l'élève est entièrement autonome. Il doit « simplement » écrire des énoncés qui comprennent une question puis les soumettre à la classe pour discussion.

Essai 6 : le Journal du Nombre de Michelle


problème
j'avais 8 tongue ce matin des voleur sont
il s'en ont volé 5 combien en reste-il ? 3
je suis allé à l'école ce matin
j'avais neuf crayons dans ma trousse
j'en ai donné 4 combien en reste-il ? 4
j'avais 9 dent de tombé y en a une
qui bouge énormément je suis tombé
et elle est tombée Combien de dent
perdu ? 10
hier j'ai achetée 2 poisson rouge
Madame vigot m'en a donné 20
combien j'en ai en tout ? 22
demain j'achèterais 2 paquet de
bonbon ma mamie m'en achètera
9 combien j'en auraie en tout

Photographie n°85 : Une page d'énoncés du Journal du Nombre de Michelle
Date, le 20 juin 2013

Enoncé 1. J'avais 8 tongues ce matin des voleurs sont venus ils en ont volées 5 combien en reste-t-il ? 3
Enoncé 2. Je suis allée à l'école ce matin j'avais neuf crayons dans ma trousse j'en ai donné 4 combien en reste-il ? 4 *réponse erronée*
Enoncé 3. J'avais 9 dents de lait tombées y en a une qui bouge énormément je suis tombée et elle est tombée Combien de dents j'ai perdues ? 10

Enoncé 4. Hier j'ai acheté 2 poissons rouges Madame V. (nom du professeur) m'en a donné 20 combien j'en ai en tout ? 22 Enoncé 5. Demain j'achèterais 2 paquets de bonbons ma mamie m'en achètera 9 combien j'en aurai en tout
Copie de la production de Michelle

Il s'agit de cinq énoncés dont les nombres sont compris entre 2 à 22 dont seul la réponse à l'énoncé 2 est erronée. Nous commençons par nous intéresser aux trios des nombres de chaque énoncé.

l'énoncé 1	8, 5 et 3
l'énoncé 2	9, 4 et 4, résultat erroné
l'énoncé 3	9, 1 et 10
l'énoncé 4	2, 20 et 22
l'énoncé 5	2 x 9, pas de résultat

Les nombres choisis par Michelle reposent sur les connaissances numériques (les petits nombres) avec les nombres 5 et 10 qui apparaissent comme des repères sûrs pour réaliser des combinaisons (des calculs) entre les différents nombres et mémoriser les décompositions, de même que la relation du double et de la moitié.
L'énoncé 1 met en évidence le repère du nombre 5 sur lequel la décomposition 5 + 3 = 8 peut fonctionner. L'énoncé 3 s'occupe du repère du nombre 10 puisque 9 + 1 = 10. La notion de double est présente dans les énoncés 2 et 5 et demande à se consolider puisque le double 4 + 4 entraine un résultat erroné (à l'énoncé 2) et pas de réponse proposée pour le dernier énoncé (l'énoncé 5). Quant à la numération de position, elle paraît être en place avec l'addition 2 + 20 = 22 dont le premier terme est le plus petit des deux nombres.

Nous observons les catégories sémantiques dans les énoncés.

l'énoncé 1	Chose (tongues)
l'énoncé 2	Chose (crayons)
l'énoncé 3	Corps (dents)
l'énoncé 4	Animal (poisson rouge)
l'énoncé 5	Denrée (bonbons)

L'élève a produit cinq énoncés avec quatre thèmes différents (chose, corps, animal, denrée). Tous ces énoncés ont une référence sémantique dans laquelle l'élève raconte l'histoire du problème. Par exemple, nous rappelons l'énoncé 3 avec la dent de lait qui bouge énormément, l'élève tombe et la dent tombe aussi. Les énoncés ne sont pas purement arithmétiques puisque les nombres sont entrelacés dans le thème de l'énoncé. Les nombres sont en lien avec les mots, avec les jeux de la langage pratiqués par les élèves au sein des énoncés de problème, et encore une fois, les nombres disent l'histoire.

Ensuite, nous observons les intitulés des questions.

l'énoncé 1	Combien en reste-t-il ?
l'énoncé 2	Combien en reste-t-il ?
l'énoncé 3	Combien de dent j'ai perdu ?
l'énoncé 4	Combien j'en ai perdu en tout ?
l'énoncé 5	J'en aurai en tout ?

Ces intitulés traduisent pour la plupart des situations soustractives avec une prégnance particulière pour la structure induit par la recherche du « reste ». Quatre questions commencent par le mot « combien », seule la dernière question (énoncé 5) traduit une autre structure de problème (la somme).

Au sein de la progression ACE, la soustraction n'a pas été construite comme le contraire de l'addition mais l'addition et la soustraction se sont co-élaborées. Il est possible que cela ait entrainé que les élèves ont développé davantage un rapport aux structures des problèmes et non des liens spécifiques à telle opération. Cela s'est traduit par la recherche du nombre-tout et/ou du nombre complément.

Les connecteurs de temps

l'énoncé 1	Ce matin
l'énoncé 2	Ce matin
l'énoncé 3	Pas de connecteur
l'énoncé 4	Hier
l'énoncé 5	Demain

Les énoncés sont ancrés dans le présent ou dans un passé et futur proche (voir les connecteurs), ceci s'explique par le fait que l'élève est au centre des problèmes. Il est l'auteur et l'acteur. Dans les cinq énoncés, les histoires concernent directement Michelle et son quotidien (l'école, les bonbons, son professeur, sa mamie) à l'exception des voleurs. L'énoncé 1 n'est pas un problème plausible puisqu'il « parle » de 8 tongues (propriété de Michelle), de plus, les voleurs dérobent 5 tongues. L'obstacle réside sur la partition des chaussures qui fonctionnent par paire, on peut donc penser que les voleurs n'auraient pas pris un nombre impair de chaussures.

Le temps verbal de rédaction des cinq énoncés

l'énoncé 1	texte	Imparfait Passé composé
	question	Présent
l'énoncé 2	texte	Présent Imparfait Passé composé

	question	présent
l'énoncé 3	texte	Imparfait Présent Passé composé
	question	Passé composé
l'énoncé 4	texte	Passé composé
	question	présent
l'énoncé 5	texte	Futur
	question	Conditionnel

Les thèmes sélectionnés par Michelle sont en rapport avec son quotidien et tournent autour de son univers. Il y a l'école et la maison que nous retrouvons évoqué avec la trousse, les crayons et le professeur. La maison est représentée par l'énoncé avec la mamie de Michelle, très présente dans sa famille. Ensuite, nous notons les thèmes chers aux élèves de six ans comme les bonbons, les animaux et la dent de lait dont la perte occasionne souvent l'obtention d'une pièce de deux euros pour l'achat de nouveaux bonbons. Les élèves de six ans aiment aussi se faire peur, un peu, ce qui explique la présence de voleurs dans l'énoncé 1 qui dérobent un bien « sans valeur », des tongues. Ils ne prennent rien d'important.

SYNTHÈSE

1. LE JOURNAL DU NOMBRE, INSTITUTION-INSTRUMENT PROTOTYPE

L'origine des questions de recherche

Le Journal du Nombre peut-il permettre aux élèves moins avancés de trouver une place dans la classe et participer à l'avancée du temps didactique ?

Cette question, essentielle selon nous, est à l'origine du travail exposé dans les quatre chapitres. L' enjeu de la place des élèves moins avancés dans l'élaboration des savoirs ne peut être pensé sans un dispositif particulier dans lequel l'élève a la possibilité d'effectuer des « retours » et de travailler sur des savoirs anciens afin d'étudier dans sa propre temporalité. L'immersion dans des situations répétitives et évolutives (les situations de la progression de la recherche ACE) participent à la création de cette temporalité autre mais le moyen que nous avons choisi d'étudier, dans cette partie de la thèse, est la mise à disposition d'un cahier pour faire des mathématiques « autrement » pour l'élève et la classe, que nous appelons le « Journal du Nombre ». L'élève doit donc alors disposer d'un espace personnel dans lequel mener des enquêtes dans sa propre temporalité, mais également pour l'élaboration du savoir collectif et établir ainsi un rapport spécifique aux « objets » mathématiques.

2. LE TRAVAIL DU CONTRAT : L'EXEMPLE DE LA RÉTICENCE-EXPRESSION

L'incitation productive collective va nous permettre à nouveau d'expliciter la notion de réticence-expression. Dans le chapitre 3, nous avons défini l'incitation productive collective comme un temps d'étude collectif qui précède la recherche dans le Journal du Nombre. L'enjeu est de doter tous les élèves de capacités à produire des écritures mathématiques en rapport avec le savoir visé. Pour cela, le professeur et les élèves « tissent » conjointement un arrière-plan nécessaire à la compréhension du milieu-recherche dans lequel le jeu d'apprentissage va pouvoir se dérouler.

Le professeur va s'exprimer et, notamment sur les règles définitoires, afin d'aider l'élève à s'orienter parmi les divers choix possibles dans les moyens et les stratégies. Le professeur parle mais il ne dévoile pas la stratégie gagnante. L'élève doit, de lui-même, comprendre quelle peut être la stratégie gagnante. A l'aide de l'exemple développé dans le chapitre 3, à partir d'une annonce en trois termes égale à un lancer en deux termes, nous montrons que la réticence-expression porte essentiellement sur les règles définitoires, et a pour fonction de « dévoluer » le bon jeu à l'élève. La discussion va donc porter sur l'étude collective des contraintes afin d'en assurer la compréhension et la référence.

2.1 L'incitation productive collective

Comme on l'a vu, la situation étudiée consiste dans la production d'écritures mathématiques pour lesquelles l'annonce et le lancer n'ont pas le même nombre de termes. L'écriture de l'annonce comprend trois termes et le lancer s'écrit avec deux termes. De plus, les écritures ne réfèrent pas à un milieu-recherche identique puisque les nombres correspondant à l'annonce et au lancer sont régis par des contraintes différentes. L'annonce peut être constituée par des nombres de 0 à 5 puisque ces nombres peuvent être représentés par les mains, en référence au jeu des annonces « Dés et doigt » (ils ne peuvent donc être supérieurs à 5). Le lancer, quant à lui, ne peut contenir de zéro puisque sur le dé, les constellations existantes vont de 1 à 6. Les écritures peuvent être également sans référence au jeu des annonces « Dés et doigts ».

Ainsi que nous l'avons montré, la situation se complexifie avec l'annonce en trois termes. Nous avons montré qu'elle correspond à une annonce « collective », réalisée par une équipe de trois élèves dont chaque co-équipier montre une main dans le choix d'un nombre-partie. Pour la constitution du lancer, la situation évolutive nécessite deux dés et crée un espace numérique dont les nombres peuvent être compris entre 1 et 6 (avec un dé) et de 2 à 12 (avec deux dés).

Nous avons montré que l'incitation productive collective doit être pensée dans le cadre des contraintes fournies par l'analyse *a priori* spécifique de la situation correspondant au jeu des annonces. Rappelons ici que c'est la relation d'égalité qui conditionne la production des écritures additives de l'annonce et du lancer. L'élève produit une écriture dont chaque membre de l'équation « répond » à des contraintes liées à une référence spécifique ($nA \leq 5$ et $1 < nL < 6$) et par la relation d'égalité qui relie des décompositions additives différentes d'un même nombre ($nA = nL$).

Lors de la production d'annonces égales au lancer avec des premiers nombres, l'élève cherche à multiplier les écritures additives. De l'étude de l'égalité avec les petits nombres, l'élève fait la rencontre d'une propriété « la commutativité » et du nombre zéro, le représentant de l'élément neutre dans les situations additives. Par exemple, l'élève décline les décompositions additives du nombre 2 en trois termes (2 + 0 + 0), (0 + 2 + 0) et (0 + 0 + 2) puis (1 + 1 + 0), (1 + 0 + 1) ou (0 + 1 + 1). Il comprend que parfois le nombre sert à l'ajustement mais le plus souvent, c'est le nombre zéro qui occupe cette fonction.

2.2 La notion de réticence-expression

Comme nous l'avons vu, le professeur « installe » le milieu-recherche lors du temps de l'incitation productive collective avec l'étude des contraintes génériques. Il cherche ainsi à dévoluer le milieu-recherche aux élèves. Pour cela, l'action du professeur va être orientée vers une recherche conjointe des règles définitoires de la situation. Le professeur va initier la mise en enquête collective en appui sur les références. Il va beaucoup s'exprimer en réaction aux prises de paroles des élèves. En fait, ce sont les propositions des élèves qui vont aider à cerner peu à peu l'arrière-plan dans lequel le jeu demandé par le professeur va se dérouler. Sans la défnition de cet arrière-plan, l'élève pourrait investir une zone de non jeu, guère propice aux apprentissages. Ici, il s'agit de définir la zone dans laquelle l'enquête/recherche doit se dérouler, mais répétons-le, elle ne supprime nullement les erreurs. Comme nous l'avons montré avec la proposition 1 + 2 + 1 = 4 + 0 refusée par un élève dont l'argument était la présence du zéro dans le lancer. Pourtant, le professeur fait remarquer que la proposition était intéressante puisqu'elle représentait le nombre quatre. Aussitôt, un élève, Christophe propose une autre décomposition du nombre quatre avec 1 + 3. Le professeur demande à nouveau à la classe si cette nouvelle proposition peut être « prise » ? Un élève affirme : « oui, parce que c'est le même nombre ». Christophe précisera ensuite « qu'un nombre s'occupe de deux nombres ». Le professeur valide en accord avec la classe l'écriture 1 + 2 + 1 = 1 + 3. Il reprend la formule de Christophe et il fait entourer par Christophe le nombre 3 dans le lancer et les nombres 1 et 2 dans l'annonce. Puis il les relie avec une flèche. Il s'exprime ainsi « le 3, il s'occupe de deux nombres, du 1 et du 2 ».

Dans les transactions que nous venons de décrire, le professeur a donc parlé et même beaucoup parlé pour orienter les élèves dans la direction nécessaire à l'étude mais il a tu l'enjeu de l'apprentissage-enseignement afin de dévoluer le milieu-recherche aux élèves. L'enquête est à poursuivre et à mener par les élèves dans le Journal du Nombre mais les règles définitoires sont désormais connues.

Les élèves doivent donc comprendre « avec quoi » ils jouent sinon le jeu n'est pas possible. Le professeur tait assurément*, d'une part,* et *l'enjeu de l'apprentissage lui-même, d'autre part. En cela, l'exemple que nous étudions dans cette synthèse est emblématique de la manière dont se déroule l'action conjointe dans la classe, et nous aurions pu en saisir beaucoup d'autres..*

En fait, le professeur guide et sert de « régulateur » lors de temps de l'incitation productive collective. Par exemple, il pose la question à la classe : « alors, est-ce que l'on prend cette proposition ou on ne prend pas ? » Il fait donc preuve de réticence-expression, ceci afin de dévoluer le milieu-recherche aux élèves. Réticence, parce que le professeur ne dit pas si lui pense justifié ou non d'accepter cette proposition. Expression, parce que c'est à propos de cette proposition-là que le professeur pose la question, et construit l'espace d'un choix possible.

Ainsi, le travail dans le contrat, au sens où le système de connaissances (le contrat) avec lequel les élèves appréhendent le milieu-problème (la proposition étudiée et l'évaluation de sa validité) est façonné par le dialogue qui s'établit à partir de la question du professeur.

2.3 Les échanges lors du débat

Considérons l'exemple emblématique suivant : l'élève produit des annonces « perdantes » au jeu des annonces mais gagnantes au jeu didactique. En fait, l'élève écrit volontairement des annonces qui ne respectent pas le critère selon lequel le nombre-somme de l'annonce doit être supérieur au nombre-somme du lancer (nA (3 termes) > nL (2 termes)).

Cette situation prolonge le travail évoqué dans le paragraphe précédent. Elle nous semble mettre en évidence les éléments suivants : l'étude des critères de validité amène à une modélisation de la situation qui consonne avec d'autres écritures du même type, par exemple lors de la recherche du nombre inconnu avec un tirage de cartes qui oppose deux équipes, ou bien la recherche de différentes décompositions additives d'un nombre (l'exemple de la longue écriture des nombres 8 et 7). L'élève prend ainsi l'habitude d'interroger la situation selon des critères valables dans un milieu et caducs dans un autre. Il recherche l'arrière-plan défini avant « d'appliquer » les critères aux écritures. Cela lui permet également de réinterroger son travail et celui d'autrui avec les critères sélectionnés par le milieu de la recherche. Ces critères, pour devenir la référence de la classe existent et sont débattus lors de l'incitation productive collective. Le temps des échanges conditionne la qualité des productions réalisées ensuite dans le Journal du Nombre.

Lors de l'incitation productive, un élève fait une proposition à la classe. Les élèves réagissent et argumentent selon les critères de la situation (par exemple, le jeu des annonces « Dés et doigts »). En cas de doute ou de question, le professeur ne répond pas précisément, il renvoie toujours au groupe, en jouant sur sa position topogénétique dans la dialectique de la réticence et de l'expression, comme nous l'avons vu. Des échanges variés et nombreux amènent à une pluralité de productions dans le Journal du Nombre.

2.4 Les élèves moins avancés à l'initiative du travail proposé, la mise en enquête et l'avancée de temps didactique : l'exemple d'George

Considérons de nouveau le travail des annonces « perdantes » : il est de l'initiative d'George, un élève moins avancé. A partir du nA (3 termes) > nL (2 termes), l'élève propose de produire des annonces perdantes. Ces annonces vont constituer l'occasion d'étudier à nouveau la relation d'égalité/inégalité. Répétons-le, il s'agit de produire des annonces « perdantes » au jeu des annonces « Dés et doigts » mais gagnantes au jeu didactique.

George est bien dans le jeu. Il semble éprouver du plaisir à la transgression de la règle et il trouve une posture d'élève. Mais surtout, le travail sur le respect ou le non respect des critères de validité des écritures produit une étude approfondie de ces critères pour toute la classe, puisque, l'élève dans l'argumentation de « refus » doit nécessairement expliciter le pourquoi de ce refus. Ce temps n'est pas un temps de formatage, dans lequel l'élève doit montrer qu'il « colle » au contrat. C'est un temps de travail public, à la fois indivuel et colllectif, de *travail du contrat*. On tente ainsi d'éviter le « statut » de l'élève « hors jeu » puisque, même si l'élève ne sait pas (encore) comment on joue efficacement ni ce qui doit être appris, il peut commencer maintenant à chercher, c'est-à-dire à mener sa propre enquête, en fonction de ses propres connaissances disponibles et différentes d'un élève à l'autre, tout en s'appuyant systématiquement sur le collectif de la classe dans l'exploration de questions qui permettront l'apprentissage.

3. LE JOURNAL DU NOMBRE, UN « CAHIER DE RÉUSSITE » ET POURQUOI

Pourquoi le Journal du nombre serait-il un « cahier de réussite » « plus » que ne le serait un fichier de mathématiques ou mieux un cahier de recherche ?

L'expression « cahier de réussite »signifie que le Journal du Nombre permet d*'ancrer* l'avancée du temps didactique dans les productions individuelles et collectives des élèves, sur le long terme. La « réussite » concerne donc le fait que les productions d'élèves constituent la matière même de l'avancée dans la classe. Avec le Journal du Nombre, la classe *réussit* à avancer parce qu'elle *réussit* (dans) le travail du contrat. Sa force semble aussi résider dans l'évaluation différente (que l'inexistence de « trace rouge » dans le cahier peut symboliser) apportée par le professeur. Le journal autorise l'émergence de l'erreur à un temps t puis la transformation de la connaissance erronée à un temps t + 1 parce que l'erreur est passée de privée à publique. Elle a été débattue. L'élève peut écrire des annonces « erronées » ou partiellement vraies. Ensuite, elles servent à toute la classe à poursuivre l'enquête sur les nombres, les propriétés et les relations à un temps t + 1. C'est pour cette raison que les situations, à partir du Journal du Nombre, ne parcellarisent pas le savoir, ne l'émiettent pas sur l'axe du temps didactique, mais *relient* les connaissances les unes aux autres. Dans une telle perspective, l'erreur est potentiellement exploitable pour l'élaboration des connaissances pour tous.

3.1 Le travail sur l'écriture mathématique et la création de jeux de langage spécifiques

Considérons le travail, qui nous semble emblématique à partir d'un nombre qui « s'occupe de deux nombres ».Cette formulation est synonyme d'une autre : « voir un nombre dans un nombre » syntagme contenu dans la progression ACE, et qui permet d'expliciter le fait que si l'on veut décomposer par exemple 6 dans une écriture additive dont l'un des membres est 2, on « fait voir 2 dans 6 », et on écrit 6 = 4 + **2**.

Ce travail a permis aux élèves de travailler les stratégies de décomposition-recomposition. C'est à partir de l'expression « le nombre s'occupe de deux nombres » (par exemple, l'élève construit la réciprocité du procédé par le symbole de la flèche et les expressions associées. Il montre le groupement des deux nombres avec « le 6 s'occupe du 4 et du 2 », mais l'inverse s'élabore également puisque dans 6, l'élève voit 4 et 2 et dit : « j'extrais le 2 par exemple et je peux le combiner au 3 pour faire 5) reliée à l'expérience vécue collectivement lors du temps de l'incitation productive collective que les élèves ont formulé à la suite deux autres termes en relation avec cette expérience. Il s'agit donc d'« extraire un nombre » et de « combiner un nombre ». Pour chaque production, l'élève n'utilise pas forcément le recours aux calculs mais il « agit » sur les écritures afin de les comparer avec les deux procédés évoqués. Cette production langagière et sémantique permet de retrouver les significations de ACE, mais celles-ci sont ancrées dans l'expérience propre des élèves, sémantisée par des jeux de langage spécifiques.

Comme nous l'avons montré, ce travail sur l'écriture mathématique permet à l'élève de travailler sur des critères spécifiques valables dans telle situation mais réfuter dans telle autre. L'élève élabore ainsi un rapport générique puis spécifique aux « objets » mathématiques, tout en perfectionnant les procédures de calcul ou de comparaison.

3.2 Le travail sur la construction du nombre avec les productions de plusieurs générations

Dans ce qui précède, les productions d'Jean-Louis nous ont servi à montrer la nécessité de travailler dans un temps long.

Jean-Louis produit différentes écritures du nombre 8.

La production de génération 1 montre une segmentation des connaissances puisque la décomposition additive est reliée au nombre-tout mais séparée de la décomposition additive suivante (G 7 + 1 = 8 avec l'enclos du cerne, 5 + 3 = 8 G avec l'enclos du cerne).

La production de génération 2 indique une évolution très progressive puisque les décompositions sortent du cerne et tentent de se suivre (1 + 1 + 1 = 3 au-dessus d'un rectangle, 2 + 1 = 3 au-dessus d'un rectangle , 1 + 2 = 3 au-dessus d'un rectangle).

Enfin, la production de génération 3 (seize écritures additives pour les nombres 6, 2, 7 et 8 avec par exemple : 8 + 0 + 0 + 0 = 8, 4 + 4 + 0 + 0 = 8, 5 + 3 + 0 + 0 = 8...) atteste de décompositions qui se « répondent » et montrent que l'élève a construit des relations entre les différentes décompositions du même nombre. Les productions de générations 2 et 3 retracent l'évolution significative des connaissances lorsque l'élève peut étudier dans sa propre temporalité.

Ce sont les échanges *sur* les productions et notamment les questions des élèves sur le pourquoi de telles écritures qui provoque une décentration de l'élève-auteur de son travail et une évolution personnelle. L'évolution est aussi collective parce qu'elle est partagée au sein de la classe. Elle se retrouve dans d'autres productions. L'exemple choisi (le travail sur les productions de génération 1, 2 et 3) semble donc emblématique, selon nous d'une pratique généralisée des élèves de la classe de Quimper.

4. LA TEMPORALITÉ

La temporalité n'est plus liée à l'organisation du savoir de l'élément le plus simple au plus complexe. La recherche ACE et l'étude dans le Journal du Nombre permettent de dépasser l'antériorité séquentielle par la cohabitation d'un rythme collectif sur les savoirs (l'étude des situations mais également l'étude collective des productions dans les Journaux du Nombre) et d'un rythme individuel (les connaissances personnelles, anciennes … dans le Journal du Nombre).

4.1 L'élève étudie dans sa propre temporalité et devient autonome

Les connaissances des élèves sont à des états différents. Parfois, même, l'élève rencontre son ignorance. Cela est nécessaire afin de permettre un véritable questionnement sur le savoir mais l'ignorance ne peut et ne doit perdurer.

Par exemple, nous avons montré que l'élève pour assurer le gain va mener l'enquête dans un champ numérique qu'il maîtrise bien (les répertoires additifs avec les premiers nombres). Cette enquête produira du savoir nouveau. Nous l'avons montré dans l'exemple emblématique de la longue écriture additive du nombre 8 avec Anne, qui écrit des décompositions additives avec le signe « - », alors que cette connaissance n'a pas encore été travaillée en classe à cette période. D'autres élèves auront eux nécessité d'étudier à nouveau l'ordinalité de la composition des écritures en lien avec la cardinalité.

Les explorations du Nombre dans le Journal du Nombre favorisent l'autonomie qui est un « apprentissage » conséquence de la « nouvelle » posture d'élève. Nous avons montré par exemple que l'élève propose des écritures additives pour le nombre 8 à partir de ses connaissances et ne recherche donc pas la réponse à des calculs « imposés » par le professeur ou la connaissance du jour du fichier. L'ingénierie déploie les situations et le Journal du Nombre favorise les diverses explorations, les retours sur les savoirs anciens sont possibles comme sur les connaissances à venir. Ainsi, l'élève est contraint de mener des enquêtes-recherches et elles se déroulent dans sa propre temporalité.

L'élève aborde les nouvelles situations à partir de connaissances qu'il possède. L'exemple de la longue écriture, avec Richard cette fois-ci, montre une confusion entre le nombre de chiffres et la grandeur du Nombre représenté. L'élève « nie » également les signes mathématiques présents, comme nous allons y revenir immédiatement ci-dessous. L'étude de la situation permet de construire une référence commune à la classe avec des significations partagées par tous sur lesquelles les connaissances se greffent, se développent, se complexifient et se métamorphosent. Encore une fois, l'évolution est significative mais différente pour tous puisque la relecture de la longue écriture attestera des états différents de l'élaboration du nombre dans son unicité.

4.2 L'erreur comme régulateur de l'apprentissage et la modification du clivage privé-public (les connaissances anciennes et futures)

L'erreur est au centre des échanges et contribue à une enquête de qualité. Par exemple, dans l'épisode avec Richard, l'élève refuse les décompositions additives en deux termes accrochées les unes derrières les autres par le signe « = » parce que « c'est beaucoup plus que le nombre étudié ». Ici, comme nous l'avons déjà évoqué, l'élève associe la « taille » du nombre avec l'espace occupé sur le tableau (le segment). La ligne complète de nombres ne peut représenter le nombre 8. L'erreur de Richard amène les élèves à percevoir que l'orientation de l'écriture (verticale ou horizontale) n'entre pas dans la désignation du nombre. De plus, la présence du signe « = » permet l'étude de la cardinalité de chaque décomposition.

Les élèves avancés peuvent investir également les différentes situations et apporter des connaissances privées, comme par exemple, Christophe et les nouveaux signes « - » et « x » dans le Journal du Nombre avant l'enquête sur ces savoirs. Nous avons évoqué précédemment ce travail et l'exemple emblématique de Christophe qui introduit le signe « - » dans la classe. Il rencontre pourtant un obstacle dans la résolution des calculs du type 4 – 6 qu'il résout momentanément par la proposition du nombre 0 (4 – 6 = 0). Les connaissances qu'il possède à ce temps t de l'apprentissage l'amène à proposer une réponse partiellement erronée puisqu'il sait que le résultat est encore moins que zéro mais il ne sait pas comment le noter. Quelques mois plus tard, il proposera des nombres négatifs. Les propositions des élèves diffusent dans la classe et se répandent avec le Journal du Nombre.

PARTIE 2 : ANTICIPATION

INTRODUCTION

Dans cette partie de la thèse, nous allons étudier plus particulièrement un dispositif nommé « *dispositif d'Anticipation* » comprenant un « *groupe d'anticipation* ». Ce dernier a déjà été évoqué dans la partie « Journal du Nombre » (cf ; 3.2.5 la notion d'anticipation au chapitre 2). Son fonctionnement s'intègre à la progression de la recherche ACE sur l'année scolaire.

Le *dispositif d'Anticipation* est un moyen de penser les obstacles éventuels rencontrés par l'élève dans l'élaboration du savoir. En conséquence, le dispositif prévoit de placer l'élève en situation de construire un rapport adéquat aux « objets » mathématiques afin de pouvoir explorer la situation d'apprentissage-enseignement proposée par le professeur et de pouvoir y jouer de manière adéquate. Le dispositif cherche à prémunir l'élève contre le statut de « hors jeu ». L'élève, sans le dispositif d'Anticipation, ne pourrait alors bénéficier des rétroactions du milieu-recherche pour poursuivre son enquête. Pour cela, les séances du dispositif d'Anticipation se placent avant les modules identifiés comme essentiels ou particulièrement ardus. Ainsi, le dispositif d'Anticipation participe à la cohabitation des différents rythmes d'apprentissage présents dans la classe.

La fonction principale de l'Anticipation est une antidote aux effets indésirables du temps didactique, qui produit la déconcertation cognitive. Il s'agit ainsi de permettre aux élèves du groupe de *devancer* le temps didactique(GERPREF SDG[9], Sensevy, Toullec-Théry & Nédelec-Trohel, 2006).

Dans une telle perspective, le *groupe d'anticipation,* est un petit groupe de travail à l'intérieur même de la classe dont la fonction principale consiste dans un temps de devancement du temps didactique. La dénomination du nom du groupe (« groupe d'anticipation ») est fortement connoté à sa fonction. Nous reviendrons sur ce point essentiel un peu plus bas.

Pour la *constitution* du groupe, nous pensons que l'hétérogénéité est nécessaire aux échanges entre les élèves. Pour son *fonctionnement*, nous choisissons une mise en œuvre régulière pour instituer une « pratique ». En fait, pour le *statut* du groupe d'anticipation et l'élaboration du savoir, celui-ci est double puisqu'il représente à la fois le rapport spécifique à « l'objet » mathématique et une cellule de germination/diffusion potentielle. Répétons-le, il « ouvre » un temps de devancement du temps didactique en appui sur le savoir ancien de l'élève. Il transforme également la relation au savoir du professeur puisque ce temps relié au groupe d'anticipation ne peut être le temps de la répétition de la « leçon » (situation future) à venir en grand groupe.

Dans la première section (*1. La genèse locale du groupe d'anticipation*), nous allons aborder les

[9] La notion d'anticipation a d'abord été travaillée au sein d'un groupe de recherche (GERPREF) de l'IUFM-ESPE de Bretagne, au sein de l'équipe d'accueil du CREAD, avec l'Institut Français d'Éducation, groupe intitulé Savoirs, Dispositifs, Gestes (SDG). Cette ingénierie coopérative continue actuellement ce travail.

hypothèses de départ au sujet de l'anticipation puis les applications possibles à partir de la constitution d'un groupe d'anticipation dont nous analyserons le fonctionnement à partir de plusieurs séances d'anticipation. La section suivante (*2. L'étude de l'égalité dans le module 10, « Le nombre inconnu*) montrera le rôle des élèves du groupe d'anticipation, qui selon nous, peuvent représenter à la fois une « cellule de germination » et une « cellule de diffusion ». Pour cela, nous allons nous servir du domaine *Situations* et des modules « Différence/Soustraction » et « Le nombre inconnu ».

1. LA GENÈSE LOCALE DE LA NOTION D'ANTICIPATION

Tentons d'analyser les raisons profondes de la genèse du groupe d'anticipation. Pour cela, il semble d'abord nécessaire de proposer une définition de notre compréhension de la notion d'anticipation avec les différentes modalités de mises en œuvre possibles dans la classe.

Pourquoi le professeur éprouve-t-il la nécessité d'instaurer un groupe d'anticipation dans une ingénierie didactique en mathématique ? Rappelons que les situations du module *Situations* de la recherche ACE sont à la fois répétitives et évolutives sur le long terme, c'est-à-dire sur l'ensemble de l'année scolaire. L'équipe de recherche ACE pense, par ce procédé, favoriser une étude approfondie du savoir, la « vie du savoir » dans la durée propre de l'élève, au sein d'un *temps de situation*, plutôt qu'une juxtaposition de connaissances. Quelles peuvent être les nécessités qui conduisent un professeur à envisager la construction et la mise en œuvre d'un groupe d'anticipation ? Comment cette modalité peut-elle être pensée et s'intégrer dans la progression/programmation ACE ? Quels pourraient être les modules concernés et pourquoi ?

Tout d'abord, nous choisissons d'élaborer de courtes « définitions pratiques » du groupe d'anticipation et de l'anticipation avant de procéder aux analyses proprement dites, pour illustrer notre propos. Celles-ci seront issues de séances réalisées lors de l'année scolaire 2013/2014.

1.1 Le groupe d'anticipation

Le groupe d'anticipation est composé des instances Professeur, Élève et Savoir. Il s'agit du professeur titulaire de la classe avec un petit nombre d'élèves (4 élèves) appartenant à la classe. Le choix d'un effectif réduit répond à la nécessité, pour chacun des élèves, d'interagir au mieux entre eux et avec le professeur pour accorder en conséquence un espace de parole important aux élèves au sein du groupe d'anticipation. Il ne s'agit pas uniquement du temps de parole « donné » à chacun. L'hypothèse de travail consiste à organiser un espace à l'intérieur de la classe pour apprendre à discuter, pour oser discuter, ce qui implique également apprendre à écouter pour échanger avec l'autre, quelque soit l'autre. C'est un objectif ambitieux et un groupe plus nombreux éprouverait sans doute encore plus de difficultés.
De plus, le fonctionnement pratique du dispositif nous a amené à penser que la séance d'anticipation devait être courte et ne pas dépasser les vingt minutes, au moins pour les premières mises en œuvre du début d'année.
Comme nous l'avons vu précisément, lorsque nous avons décrit la genèse théorique du dispositif d'anticipation (cf. *2. Un temps didactique spécifique* dans la partie *Des éléments théoriques*), parler les mathématiques, formuler des questions, échanger des connaissances, prendre en charge collectivement les réponses erronées, c'est autoriser chacun à mettre son *capital d'adéquation* en conformité avec *les attentes de l'institution-classe.* Le temps est un facteur nécessaire pour tenter la construction de la mise en adéquation par *la répétition de la modalité d'anticipation*. Mais, nous insistons, il ne s'agit nullement de répéter « en avance » la leçon. Nous faisons l'hypothèse que l'anticipation permet aux élèves *moins avancés* d'occuper une place d'élève dans la classe.

Ensuite, la constitution du groupe d'anticipation suppose impérativement un groupe de niveau hétérogène. Un groupe de niveau composé exclusivement d'élèves *moins avancés* reproduirait une structuration de classe classique. Les positions topogénétiques resteraient identiques. Le professeur sait et les élèves sont ignorants. Comme nous l'avons montré plus haut (cf. *2. Un temps didactique spécifique* dans la partie *Des éléments théoriques*), nous aurions un professeur « savant » puisqu'il sait avant tout le monde et des élèves « ignorants » puisqu'ils ne savent pas encore. Ils n'ont pas encore appris. De fait, les choses sont plus complexes, puisque cette ignorance n'est pas également partagée, ce qui implique que l'action conjointe devient vite élective, et sélective, entre le professeur et les élèves plus avancés. De plus, l'avancée du temps didactique serait soumise au temps du déroulement de « l'école classique » qui ne correspond pas au temps de l'ingénierie didactique ACE. Contre cette vision des choses, le groupe de niveau hétérogène modifie les positions topogénétiques puisqu'il existe au moins un élève *avancé* qui sait (mieux). Il peut devenir une aide pour le professeur et enrichir les débats et la confrontation. Il alimente les échanges et établit des « ponts de compréhension » entre le savoir et les élèves *moins avancés*. Dans une structure de classe « classique », comme nous l'évoquions ci-dessus, il existe aussi des élèves plus avancés qui savent avant les autres mais leur pertinence ne se transmet généralement pas, ou assez peu, aux autres élèves de la classe. Le *dispositif d'Anticipation* est constitué d'un groupe d'élèves de niveau hétérogène (le groupe d'anticipation) qui fonctionne comme une « cellule de diffusion » dans laquelle les phénomènes de « contamination », de « contagion » du savoir, sont appelés à croître.

1.2 La notion d'anticipation : hypothèses de départ

Les élèves *moins avancés*, et *a fortiori* les élèves *hors jeu* rencontrent des obstacles qui les empêchent de jouer au jeu pratiqué par toute la classe. Ces obstacles font barrage à la compréhension de la situation.

L'hypothèse de travail sous-jacente à la production d'un groupe d'anticipation est que celui-ci n'a pas vocation à supprimer les erreurs. Comme l'ont montré de nombreuses recherches en didactique Ravestein & Sensevy, 1994 et Sensevy, 2011, l'erreur fait partie intégrante du processus d'apprentissage, et le professeur comme les élèves apprennent souvent beaucoup des erreurs produites *à certaines conditions*.

D'une certaine manière, le groupe d'anticipation organise de telles conditions. Il existe pour réduire la distance entre le savoir et l'élève. L'élève doit s'approcher d'une zone dans laquelle la construction du savoir est possible, dans laquelle l'erreur est donc nécessairement importante. C'est à partir de l'erreur que la co-construction du savoir visé peut s'envisager. Si l'élève est trop éloigné de cette zone, il reste étranger à la situation.

L'hypothèse est que l'élève par cette modalité de travail, le groupe d'anticipation, peut s'autoriser à reprendre une place d'élève *ordinaire* dans la classe (Sensevy, Toullec-Théry, & Nédelec-Trohel, 2006),

Nous précisons notre propos. Le groupe d'anticipation ne se réduit pas à *prendre de l'avance* sur le savoir visé. Cela reviendrait à faire avant le reste de la classe pour savoir par anticipation. Il ne constitue pas une occasion pour faire « en double » pour donner à l'élève une chance de comprendre le savoir à construire par la répétition. Puisque notre vision de la notion d'anticipation n'est ni la répétition de la leçon prévue en grand groupe (la classe entière) ni la course aux apprentissages par « le faire en avance », nous précisons maintenant notre conception.

La notion d'anticipation s'entend d'abord par rapport aux objets d'enseignement. Notre hypothèse est que le groupe d'anticipation donne aux élèves inclus dans ce groupe la possibilité de construire ou de reconstruire un rapport aux objets conformes aux attentes de l'institution. Dans cette perspective, ce sont les rapports construits aux objets qui pourraient amener l'élève *moins avancé* à s'engager sur le chemin de la compréhension. L'enjeu du groupe d'anticipation est donc l'élaboration d'un rapport

adéquat aux objets. C'est ce que nous allons montrer dans l'étude empirique des échanges lors de séances du groupe d'anticipation (la cellule de germination) et lors du retour dans le grand groupe (cellule de diffusion).
Ce serait à cette condition que l'apprentissage naîtrait d'un rapport aux objets conforme aux attentes de l'institution-classe avec la mise en conformité du capital d'adéquation. Avant, d'illustrer notre propos par des structurations de séances d'anticipation du module *Différence/Soustraction*, nous ajoutons quelques lignes sur la constitution du groupe d'anticipation de l'année 2 (2013/2014) à Quimper.

1.3 La constitution du groupe d'anticipation

Nous avons déjà précisé que le groupe d'anticipation est un groupe de niveau *hétérogène*. De plus, les élèves *moins avancés* de ce groupe d'anticipation ne représentent pas tous les élèves *moins avancés* de la classe. Ce sont les élèves *moins avancés* qui ne pourraient bénéficier des rétroactions du milieu, et des signes du professeur. En fait, ce sont les élèves *moins avancés* qui lors de remédiations in situ, des rétroactions du milieu et/ou du professeur, ne *voient pas* les signes produits à leur intention par le professeur, ou tels qu'ils peuvent être déchiffrés dans le milieu. Pour eux, les signes ne font pas sens. Ces élèves n'établissent pas un rapport aux objets conforme aux attentes de l'institution-classe.
Le risque est majeur puisqu'il semblerait qu'un nombre important de rapports non conformes pourrait amener le hors jeu de ces élèves. Cette absence de rapport adéquat à l'activité mathématique laisse les élèves *moins avancés* en dehors de l'étude et de la compréhension de la situation et du savoir mathématique en jeu. Le groupe d'anticipation n'est donc pas constitué de tous les élèves pouvant se tromper ou s'égarer momentanément. Il contient un ou deux élèves pour lesquels la confrontation avec la réponse erronée ne produirait pas de modifications dans la compréhension du savoir. C'est donc un groupe de « mixité intellectuelle » composé d'élèves en *compréhension différente* du nombre.

1.3.1 Le choix des élèves du groupe d'anticipation

Le groupe d'Anticipation de l'année 2 (2013/2014) est composé de quatre élèves. Afin d'expliciter les choix du professeur dans la constitution du groupe, nous définissons les caractéristiques du rapport au savoir des élèves appartenant au groupe d'anticipation, en précisant de nouveau que tous les élèves moins avancés n'appartiennent pas au dispositif d'Anticipation.

Le professeur a choisi deux élèves moins avancés qui ne semblent pas tirer profit des rétroactions du groupe-classe lors des séances collectives. Ils « voisinent » avec la zone du « hors-jeu ». Une élève avancée fait partie du groupe. Elle n'est pas l'élève la plus avancée de la classe mais sa participation orale est toujours très active et dans tous les domaines. Le quatrième élève du groupe est un élève qui désire apprendre. Il se trouve régulièrement confronté à des questions-obstacles en relations avec le savoir ancien. L'équilibre filles-garçons n'est pas respecté puisqu'il y a trois garçons et une fille dans le groupe d'anticipation.

1.3.2 Les caractéristiques des quatre élèves du groupe d'anticipation

La seule fille du groupe est l'élément avancé. Son regard et ses paroles sur les productions de ses camarades, même moins avancés, ne sont jamais négatifs. Elle tente de comprendre l'erreur commise par un échange sur les écrits produits. C'est une élève « scolaire », qui « traduit » souvent les énoncés du professeur. Elle exprime régulièrement ses doutes avec « je ne comprends pas ». L'échange ainsi suscité peut créer un arrière-plan commun. La question est bien sûr posée au professeur mais celui-ci renvoie toujours au groupe-classe.

Le garçon Z (Richard) est un élève qui désire gagner. C'est un joueur de foot qui apprécie la compétition et l'esprit de jeu. Lors de difficultés, il est plutôt collectif et recherche alors des ententes pour obtenir le gain. Il n'hésite pas à montrer son travail, même une production erronée, sans appréhension. Pour cet élève, l'école représente un lieu où l'on apprend. Dès lors, il existe des choses que l'on ne sait pas ou pas encore. La classe crée les conditions de l'apprentissage-enseignement.

Le garçon Y (Mathieu) semble « indifférent » au savoir. Il recopie souvent les écrits du cahier de la voisine. Il a aussi tendance à être très discret dans la classe. Il cherche à se faire « oublier » par le professeur. Le jeu, par contre, l'intéresse : son comportement change.

Le garçon X (Timéo) est l'élève le moins avancé du groupe d'anticipation. Il est toujours très sage pour ne pas attirer l'attention sur lui. Il pratique le rugby et participe à des compétitions. Il est toujours le premier élève à sortir en récréation. Il reste un des derniers élèves à disposer du matériel nécessaire pour la leçon (par exemple, sortir l'ardoise demandée par le professeur). Lors de son interrogation par le professeur, un fait caractéristique de son comportement est l'attente. Il semble chercher une réponse à la question posée. Généralement, l'attente se prolonge un peu et des camarades finissent par souffler une réponse. Timéo s'empresse alors de répéter. Cela ne fonctionne pas toujours.

1.3.3 L'organisation temporelle et le lieu

Le groupe d'Anticipation a débuté à la mi-novembre 2013. Dans la classe du professeur, il y avait deux professeurs des écoles stagiaires jusqu'aux vacances de la Toussaint. Lors de l'année 2012, le professeur avait choisi une mise en œuvre du dispositif d'Anticipation *plus tôt* dans l'année (dès la fin du mois de septembre et basée sur des résultats de tests). La formation des professeurs a contraint le professeur de la classe à reporter la constitution du groupe de quelques semaines. Cela a permis de cerner et comprendre davantage le rapport des élèves au savoir en situation de classe. Ensuite, le groupe d'Anticipation a fonctionné durant toute l'année scolaire avec les mêmes élèves.

Le groupe d'Anticipation est installé dans la classe, quatre tables regroupées identifient l'espace de travail (lieu permanent). L'ensemble forme et représente la cellule de diffusion à l'état de germination, c'est-à-dire que les conditions sont réunies pour assurer et garantir la diffusion des phénomènes de contagion dans la cellule, le groupe d'Anticipation proprement dit, avant la diffusion dans la classe.

2. L'ÉTUDE DE L'ÉGALITÉ DANS LE MODULE 10 « LE NOMBRE INCONNU »

Il s'agit maintenant de fournir au lecteur un arrière-plan relatif au traitement de la Différence dans ACE, nécessaire pensons-nous à la compréhension du jeu « le nombre inconnu ».

2.1 L'institutionnalisation du groupe d'anticipation avec le module Différence/Soustraction

Abordée au sein du module 7 de la progression ACE, l'objet « Différence/Soustraction » pour l'équipe de la recherche ACE n'est pas l'inverse de l'addition. La compréhension de ces deux opérations gagne à être travaillée ensemble. L'enjeu est capital. L'élève doit construire un rapport à l'objet « D*ifférence/Soustraction »* qui ne soit pas élaboré à partir des situations prototypiques de la soustraction comme « enlever » et « retirer ». Il peut et doit prendre appui sur les connaissances anciennes, c'est-à-dire les connaissances sur l'addition. Nous rappelons que deux capacités mathématiques fondamentales sont travaillées tout au long du module « S*ituations »*, les décompositions et la comparaison. Le signe « - » est introduit en tant qu'élément symbolique, comme désignateur de la différence. A terme, les élèves sont amenés à penser les relations entre l'addition et la soustraction. Ils sont également familiarisés avec les écritures du type « algébrique », des structures additives comme 5 – 3 = 2 et donc 3 + 2 = 5 mais aussi 5 – 2 = 3.

Nous donnons rapidement une schématisation des séances d'anticipation liées au module « *Différence/Soustraction ».* Initialement, celui-ci comprend quatre séances. Il s'agit d' une approche de la « Différence/Soustraction » à partir des petits nombres. Cette notion sera reprise dans le module suivant avec des nombres plus importants.

2.2 Une vision synoptique du groupe d'anticipation :les module Différence/Soustraction et Le nombre inconnu en substance.

Nous choisissons donc de décrire les différentes séances d'anticipation du module 7 « Différence/Soustraction », à partir du Journal du Nombre, pour faire comprendre au lecteur la forme générale de ces séances. Chaque séance d'anticipation sera décrite dans les grandes lignes, afin de fournir une sorte d'arrière-plan nécessaire à la compréhension du travail d'anticipation opéré lors du module 10.

Nous commençons par décrire en substance la teneur du module 7, « Différence/Soustraction », avant d'en venir à une rapide description des séances relatives à ce module. Puis nous décrivons en substance la teneur du module 10 « Le nombre inconnu », dont l'analyse fera l'objet des paragraphes suivants.

2.2.1 Le module 7 « Différence/Soustraction »

Afin de ne pas restreindre la soustraction à la seule opération de retrait qui modifie l'état initial d'un nombre, la recherche ACE propose l'étude de la comparaison de deux nombres (ou des écritures additives). Par exemple, deux élèves de CP comparent deux collections de doigts (deux annonces), comme 7 et 9.

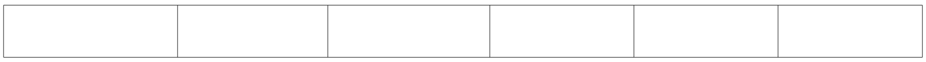
Ils recherchent alors le nombre le plus grand et le nombre le plus petit. Ensuite, ils calculent à combien de doigts correspond l'écart entre les deux nombres, c'est-à-dire « combien de doigts *de moins* et/ou de combien de doigts *de plus »* compte une main par rapport à l'autre. Pour cela, les élèves montrent sur les doigts ce qui est pareil dans les deux annonces (le même nombre de doigts) et matérialisent ainsi la *différence.*

Cette dernière peut être envisagée à partir du nombre le plus petit (7) auquel on ajoute l'écart (+ 2) pour obtenir deux annonces (deux collections de doigts) équipotentes. Mais elle peut tout autant être pensée à partir du nombre le plus grand (9) auquel l'élève enlève l'écart (- 2) pour obtenir, cette fois-ci, le plus petit des deux nombres (7) et toujours deux collections équipotentes.

La différence n'est donc pas seulement perçue comme une transformation négative, une diminution du nombre mais plutôt à travers la recherche d'un nombre-partie à partir d'une comparaison de deux nombres.

2.2.2 La séance d'anticipation, un temps de devancement du temps didactique

Les séances d'anticipation sont construites autour d'un matériel spécifique à la recherche ACE, appelé « train-nombre », qui représente des nombres sous la forme une bande de carton plastifié (forme rectangulaire de un de largeur) avec le repère du nombre 5 pour les nombres 6, 7, 8 , 9 et 10.



Autour de ce matériel symbolique, les séances d'anticipation s'organisent en *jeux* que nous décrivons ci-dessous. Pour chacun de ces jeux, nous exprimons en quoi ils sont susceptibles de faire avancer le temps didactique, et dans quelle perspective.

Le jeu de la bataille des nombres/trains

Les modalités de jeu sont les suivantes : 2 équipes A et B de 2 joueurs avec le professeur en possession des trains-nombres. L'enjeu est la construction d'un rapport à la différence à partir de l'empirie. Deux trains-nombres sont cachés à l'intérieur des mains du professeur (l'une sous l'autre) dont les extrémités restent visibles afin de pouvoir être sélectionnées par un élève des équipes A et B. Cela reprend le principe de la courte-paille.
Un élève de l'équipe A tire un train-nombre et un élève de l'équipe B fait de même. La comparaison lorsque les trains-nombres sont très différents peut être immédiate (à vue d'œil). L'équipe gagnante sait être victorieuse puisqu'elle possède le train-nombre le plus grand. Les questions du professeur « Avez-vous gagné ? En êtes-vous sûr ? Pourquoi ? « De combien est la différence » amènent les élèves à s'emparer du milieu-recherche afin de prouver le gain.
Il permettrait aux élèves du groupe d'anticipation le travail dans le contrat qui consiste dans l'élaboration d'un arrière-plan dans lequel l'enquête-recherche va se dérouler. L'élève construit alors un premier rapport à l'objet « Différence » avec les connaissances dont il dispose au temps t -1 (avant l'enseignement-apprentissage). Ainsi, la différence est représentée par « ce qui n'est pas pareil » mais la notion n'est pas construite au « sens mathématique ». L'élève la désigne avec l'usage de la comparaison et la recherche « de ce qui est pareil et ce qui est différent » entre les deux trains nombres.
Nous décrivons ce qui se passe effectivement dans la classe. Le professeur laisse les élèves effectuer des expériences de comparaisons qui vont ensuite aider à devancer le temps didactique. Nous relatons ce temps. Les expériences de comparaison des deux trains-nombres amènent une première catégorisation dans les comparaisons puisqu'il y a des « écarts-différences » importants (entre les nombres 2 et 9, par exemple) et des « écarts-différences » minimes (entre les nombres 3 et 2, par exemple). Généralement, l'élève sait qu'il a gagné avec des « écarts-différences » importants. Même la question du professeur « De combien as-tu gagné » ne provoque pas forcément la recherche de stratégies de calcul. L'élève tente alors d'*estimer* un « écart-différence » important entre deux trains-nombres. Il obtient parfois le nombre de la différence. Un « écart-différence » minime amène la discussion puisqu'un train-nombre dépasse parfois de très peu. Tout d'abord, les élèves regardent si les trains-nombres sont positionnés correctement. Le professeur revient avec la question « de combien pensez-vous avoir gagné » ?

Un milieu-recherche spécifique, un écart de un entre deux trains-nombres

La différence de 1 est intéressante car elle oblige les élèves à imaginer différents moyens de comparer. Une proposition d'élève consiste à accoler les deux trains à la suite l'un de l'autre mais le procédé n'aide pas vraiment à comparer efficacement. Une autre proposition d'élève place les trains-nombres l'un sous l'autre. Ce matériel présente un avantage certain pour la comparaison, qui ressemble à l'utilisation de deux lignes graduées, ce dont les élèves ont l'habitude. Par ailleurs, le procédé montre la différence, en permettant l'identification de la différence comme un le « nombre-partie » en plus.
Dans cette phase, l'élève poursuit la construction de l'arrière-plan et l'étude du contrat (*Un écart de un entre deux trains-nombres et la construction de l'arrière-plan au temps t de l'apprentissage-*

enseignement). Il a construit un premier rapport à « l'objet » Différence en appui sur ses connaissances anciennes et l'usage de la comparaison. Maintenant, l'élève doit quantifier la Différence et les questions du professeur « As-tu gagné ? », « De beaucoup ? », « En étais-tu sûr ? », « Prouve-le », « De combien » modifient le milieu-recherche. Pour prouver le gain, l'élève devra avoir recours au nombre. Le nombre « écart-Différence » ne peut plus être « de beaucoup », « un peu », « moyen », « c'est plus grand », « c'est plus petit ».
L'enjeu consiste essentiellement à favoriser les stratégies de calcul (pas de comptage) par la poursuite de l'estimation évoquée lors des « écarts-différences » importants. L'élève devra donc proposer un nombre et « piocher » le train-nombre correspondant. La validation sera immédiate. Soit les deux trains-nombres sont équivalents en cas de proposition juste, soit l'élève fait une autre proposition.
La connaissance des répertoires additifs mémorisés avec le jeu des Annonces « Dé et doigts » par l'élève lui permet, en appui avec les deux trains-nombres, de rechercher le nombre-partie. La validation est confirmée par l'ajout du train-nombre en appui sur les décompositions et le langage (entre les nombres 5 et 7, la différence est de 2 parce que 5 + 2 c'est 7). Le devancement du temps didactique s'effectue pour rendre l'élève en capacité de mener l'enquête-recherche dans la phase collective. Elle se consolide avec le jeu du pari.

Une variante, le gain avec le train-nombre est le plus petit

Une variante intéressante consiste à reprendre le principe de penser la comparaison à partir du nombre *le plus petit*. L'élève recherche le nombre-complément à ajouter (au nombre le plus petit) pour l'obtention de deux nombres égaux.

Au sein de ces divers jeux fondés sur le matériel symbolique des « trains-nombres », le devancement du temps didactique consiste dans la matérialisation de la différence. L'espace de la différence est recherché par l'élève à partir des deux trains-nombres puisqu'il montre ce qui est pareil (sur les trains-nombres) avant d' indiquer la différence.

Le jeu du pari

Le professeur cherche une première mise à distance de l'empirie via le travail à partir des nombres. Cela s'élabore à partir d'un jeu, le jeu du pari, que nous allons maintenant décrire.
Dans la phase 1 de ce jeu, l'accès aux trains-nombres est réservé à la validation.
Le professeur dit : « Qui veut bien parier avec moi que 5 – 3 = 3 ? Qui pense que c'est vrai ? Qui pense que c'est faux ? Qui veut parier avec moi ? » Si les élèves ne font pas de propositions, le professeur peut faire un exemple avec les trains pour expliciter les attentes du jeu du pari.
La phase 2 se déroule en deux étapes avec des soustractions plus difficiles puisqu'il y intervient des nombres supérieurs à cinq.
Dans l'étape 1, il s'agit de la recherche de la différence entre deux nombres, par exemple 8 et 5. Le professeur demande à nouveau : « Qui veut faire une proposition ? Et toi qu'en penses-tu ? »
Chacun des élèves du groupe d'anticipation est amené à proposer un nombre. Ensuite, les élèves prennent les trains-nombres du 8 et du 5. Ils les positionnent l'un sous l'autre pour effectuer la comparaison. Ils prennent également le train-nombre du nombre le plus grand parmi les propositions d' élèves, par exemple le nombre 10. Le train de 10 est alors ajouté à celui du 5 : « c'est trop », puisque le train-nombre (5 + 10) dépasse le train-nombre de 8. La proposition est rejetée. Personne n'a perdu, il s'agissait d'un essai. L'élève peut reprendre sa proposition.
Lors de l'étape 2, l'élève propose et il parie. Avec ce nouvel essai, l'élève est obligé de s'engager. La

situation le contraint à prendre en compte l'essai 1 s'il veut gagner. Les élèves du groupe d'anticipation vérifient et ils emploient le vocabulaire adéquat, « 8, c'est 3 de plus que 5 », « 5, c'est 3 de moi que 8 », et « la différence entre 8 et 5, c'est 3 ».
La spécificité du jeu du pari serait la poursuite de la construction de l'arrière-plan et le travail dans le contrat. Il s'agit d'orienter l'élève dans le paysage didactique et de le rendre attentif aux moyens dont il dispose pour gagner au « Jeu de la Différence ». Le professeur ne lui dit pas quels sont les moyens ni comment procéder.

Le sens de ces activités est de lier « devancement du temps didactique » et « rendre l'élève capable de jouer le jeu ». Au début, l'élève ne peut accorder aucun sens adéquat à certaines expressions denses en savoir « Quelle est la différence entre 5 et 7 ? ». Après les séances d'anticipation, il peut accorder un sens adéquat à ces expressions mathématiques, en appui sur des comportements mathématiques pertinents dans le milieu-problème. Nous pensons maintenant que l'élève est en capacité de pouvoir jouer au jeu demandé par le professeur dans la classe.

2.2.3 Le module 10 « Le nombre inconnu »

Nous développons la notion d'égalité. C'est un objet d'étude central dans la progression ACE, élaboré à partir de plusieurs situations évolutives. Le module 10 « Le nombre inconnu » joue un rôle majeur dans cette étude. Le module se situe plutôt en fin d'année scolaire (vers les vacances de printemps). Nous allons décrire brièvement l'enjeu de la situation du « Nombre inconnu ».
L'élève est confronté à deux tirages de cartes : un tirage A représenté par trois termes (trois nombres) et un tirage B constitué également de trois termes. La particularité de ce dernier tirage (le tirage B) réside dans le fait que seul deux termes sont connus (il y a deux nombres connus sur les trois termes de l'écriture). Le troisième terme (troisième nombre) est représenté par un point d'interrogation. Il s'agit du « *nombre inconnu* ». L'équation proposée est donc du type : 3 + 5 + 4 = 6 + 2 + ? par exemple.

L'enjeu est de calculer le *nombre inconnu* pour obtenir, maintenir, provoquer ou réduire l'égalité entre les tirages A et B. L'élève gagne si et seulement si les deux écritures sont égales. Pour cela, elles doivent représenter le même nombre (le tirage A est égal au tirage B constitué des deux nombres connus *avec, de plus* la proposition du nombre inconnu pour ce dernier).

Lors de la situation du nombre inconnu, l'élève réinvestit les notions mathématiques étudiées précédemment telles que ... « est égal à, supérieur à, inférieur à » … Il poursuit aussi l'exploration de la désignation plurielle d'un nombre, ici, par la comparaison de deux écritures additives en trois termes. Il recherche par le calcul de l'écart ou du complément, le « nombre inconnu ». Observons maintenant brièvement les différents cas de figure qui peuvent se présenter dans la situation du nombre inconnu.

Le premier cas de figure : le tirage A avec 3 termes est supérieur au tirage B avec 2 termes (tirage A > Tirage B)

Par exemple, 3 + 2 + 4 = 2 + 1+ ?, avec 3 + 2 + 4 > 2 + 1

L'élève doit calculer le nombre-tout (la somme) représenté par le tirage A (3 termes) puis le tirage B (2 termes) et chercher à égaliser. Les stratégies mises en œuvre peuvent être la comparaison des termes présents dans chaque écriture (chaque côté du signe « = »).

Ici, l'élève peut rechercher les termes identiques dans les deux écritures comme le nombre 2 présents dans les tirages A et B, ce qui « réduit » l'équation à 3 + 4 > 1. Ensuite, s'il ignore le résultat de 3 + 4, il peut décomposer le nombre 4 en 1 + 3. Il « prend » ce 3 pour le combiner avec l'autre 3 de la même écriture (utilisation de la connaissance du double). Cela forme le nombre 6 auquel il ne faut pas oublier d'ajouter le 1 (de 1 + 3). L'élève obtient 7 (3 + 4 = 3 +3 +1) à comparer avec la seconde écriture, réduite à 1. Il reste à l'élève à comparer deux nombres 7 et 1 pour rechercher l'égalité. Le nombre inconnu est 6. L'élève dispose de plusieurs procédés pour calculer le nombre 6. Il s'agit d'une stratégie de calcul.

Le groupement par cinq pourrait être également une stratégie sélectionnée par l'élève. Il réduit le nombre de termes de la première écriture sous la forme 5 + 4 à comparer à 3 + ? L'élève peut rechercher le nombre-complément de cinq à partir de 3 (+2) puis ajouter le 4. Cela revient à 2 + 4 = 6 (même nombre inconnu que la proposition précédente) et il s'agit d'une stratégie de calcul.

La stratégie la plus économique semble être le groupement des nombres du lancer (2 + 1 = 3) qui produit le nombre 3 identique à un des termes de l'annonce (**3** + 2 + 4). Le nombre inconnu sera les deux termes restants de l'annonce (2 + 4 = 6). Il s'agit ici d'une stratégie « mixte » de comparaison et de calcul.

Nous imaginons également l'élève calculer les trois termes de la première écriture qui sont égaux à 9 et procéder à l'identique avec la seconde écriture (c'est égal à 3). Ensuite, deux procédés peuvent être utilisés l'élève calcule l'écart entre les nombres 9 et 3 soit en réalisant une soustraction 9 - 3 = 6 et/ou une addition 3 + 6 = 9.

Quoiqu'il en soit, ce qui précède montre comment, dans le jeu du « Nombre inconnu », les élèves peuvent proposer de multiples stratégies, les comparer, et ce faisant, avancer dans leurs connaissances des propriétés des nombres et des opérations.

Le second cas de figure : le tirage A avec 3 termes est égal au tirage B avec 2 termes
(Tirage A = Tirage B)

Par exemple, 5 + 5 + 2 = 5 + 7 + ? avec 5 + 5 + 2 = 5 + 7

L'élève recherche le calcul du nombre représenté par le tirage A. Il s'agit du nombre douze. Pour le calcul du tirage B, l'élève peut utiliser le moyen qui consiste à « voir un nombre dans un nombre ». Ainsi le nombre 7 du tirage B peut être vu comme 5 et 2. Ici, l'élève rencontre l'égalité sous la forme de la même écriture additive et dans le même ordre. Il n'y a d'autre choix que de proposer le nombre zéro comme nombre inconnu pour compléter une écriture additive déjà égale au nombre 12.

Si l'élève n'utilise pas le « voir un nombre dans un nombre », il peut prendre appui sur les décompositions et les doubles. Le nombre 12 du tirage A est alors « reconnu » comme 6 + 6. Il s'agit maintenant de procéder à des transferts. Le nombre 6, c'est aussi 5 et 1. L'élève prend le nombre 1 et le donne au nombre 6. Cela produit l'écriture 5 + 7. Les deux écritures sont bien égales.

Le troisième cas de figure : le tirage A avec 3 termes est inférieur au tirage B en deux termes
(Tirage A < Tirage B)

Ici, l'élève ne peut égaliser. Il peut alors proposer le plus petit nombre du système numérique (le nombre zéro) mais la réponse est toujours perdante. Après avoir fait le constat que l'égalité ne peut être obtenue par l'ajout d'un nombre, il peut envisager de modifier le signe « + » en signe « - », ce qui constitue un élément crucial de la progression.

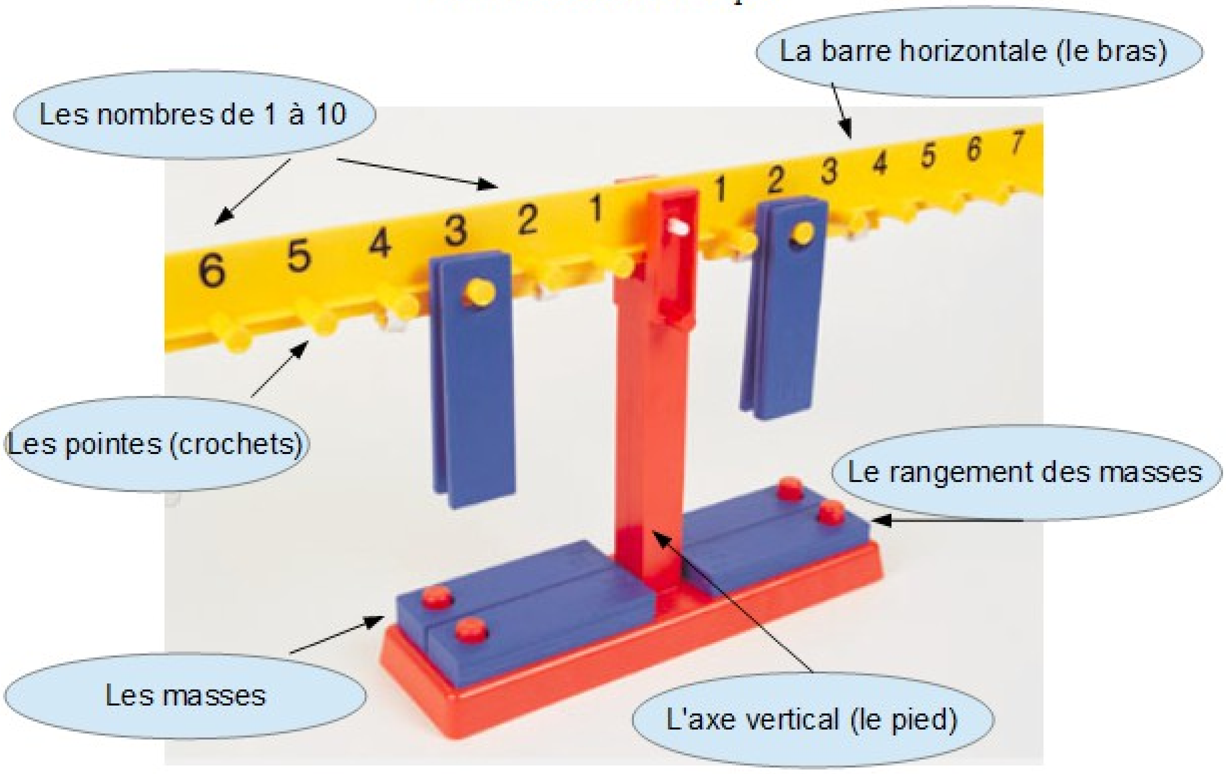
Avant de détailler le dispositif d'anticipation, nous traçons une rapide chronologie du déroulement du « nombre inconnu » dans le module 10 « Différence/Soustraction ». La chronologie est réalisée à partir de photographies. Elles devraient permettre d'identifier des différentes phases de l'élaboration de la genèse du signe « - » dans le module 10.

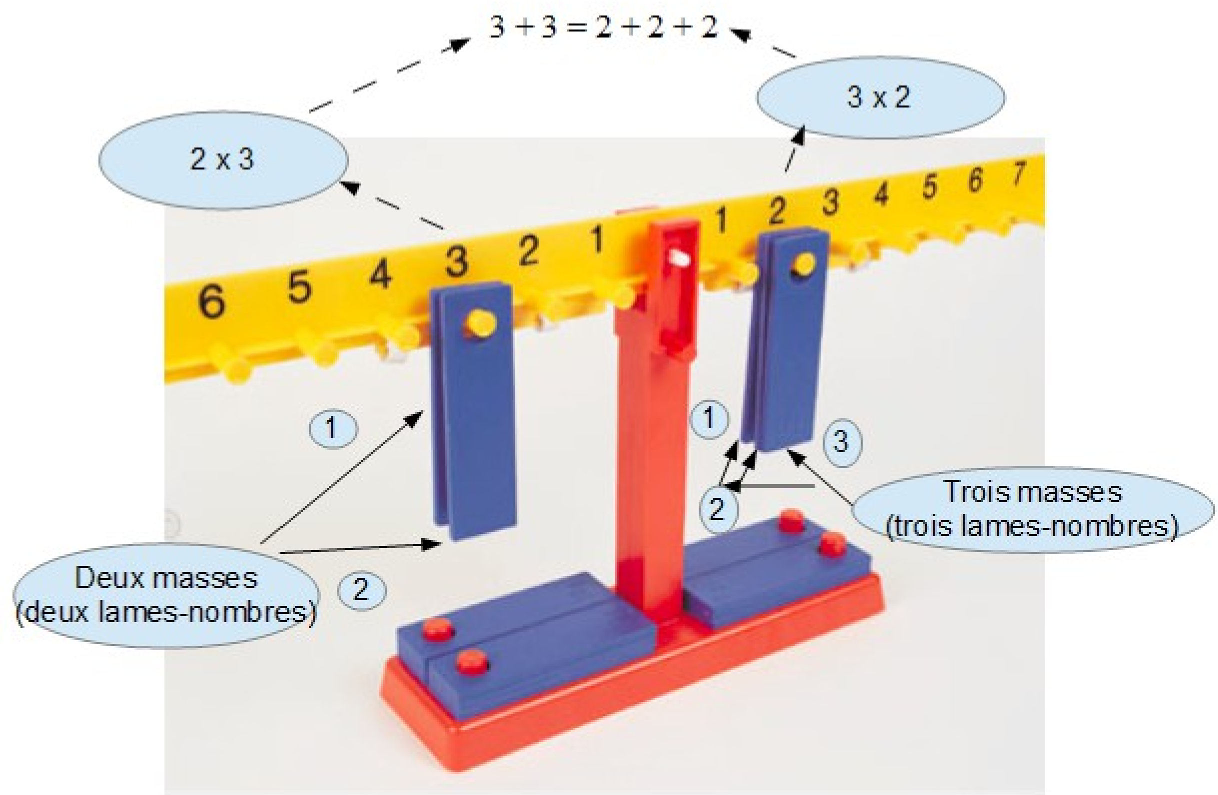
2.3 Le rôle du groupe d'anticipation dans la chronologie

Il s'agit de la présentation de trois séances d'anticipation dont l'enjeu est la construction d'un rapport adéquat à l'objet « Différence/Soustraction ».

Celles-ci s'appuient sur un matériel symbolique, une balance numérique que nous décrivons ci-dessus.

La balance mathématique





La seconde photographie explicite le fonctionnement de la balance mathématique sur laquelle des masses sont accrochées à la barre horizontale (le bras). Elle est en équilibre puisque celle-ci est parallèle à l'horizon. Cela nous indique que les masses (les rectangles bleus) à droite et à gauche sont en équilibre, et représentent le même nombre de chaque côté de la balance (6). L'exemple du nombre 6 est représenté par les décompositions additives (3 + 3) et (2 + 2 + 2) désignées par les masses accrochées sur la balance mathématique.

Envisageons maintenant le déroulement de la première introduction de ce matériel au sein du groupe d'anticipation. Nous donnons maintenant ci-dessous une photographie représentant le groupe Anticipation utilisant cette balance.

Photogramme n°1 : la balance numérique et le groupe d'anticipation

Date, le 25 avril 2014

Lors de la séance 1, les quatre élèves et le professeur travaillent autour d'un objet, une balance numérique, pour la compréhension de son fonctionnement et la construction d'expériences du rapport à l'objet « Différence/Soustraction ».

La séance 2 consiste à réaliser le même nombre que la première équipe avec trois termes (placés sur la balance). Les élèves de la seconde équipe ne peuvent choisir d'utiliser les mêmes termes, les mêmes nombres pour représenter le même nombre-tout.

La séance 3 renforce la notion d'égalité avec l'ajout d'un dé à six faces pour le choix des nombres. Lors de ces trois courtes séances d'anticipation, le reste de la classe travaille dans le Journal du Nombre sur le calcul d'opérations du type « 60 + 30 + 10 ».

Dans ce travail sur le Journal du Nombre, à partir le l 'écriture « 60 + 30 + 10 », les élèves ils extraient l'opération suivante, 6 + 3 + 1 = 10, constituée par les « petits nombres » qui représentent le nombre de groupes de dix contenus dans chacun des nombres. Puis ils ajoutent au calcul du nombre (ici, il s'agit du nombre 10) l'unité correspondante (10 d). Ils terminent par l'équivalence de 10 d c'est 100.

Envisageons maintenant le déroulement de la première introduction de ce matériel au sein du groupe d'anticipation. Nous précisons que la balance n'a pas été introduite en classe entière.

0) L'introduction au jeu

Les élèves pensent qu'il s'agit d'une balance pour calculer les grands nombres. C'est la proposition de Mathieu. Le professeur fait remarquer qu'il n'y a pas de plateaux comme sur une balance classique. Les élèves expriment alors qu'il existe des « bâtons » (des pointes-crochets) pour accrocher les nombres (les lames-masses). Ils décident de placer un nombre sur la balance et d'observer le bras de la balance. Très vite, le jeu devient la recherche de l'équilibre avec le positionnement du bras à l'horizontale.

1) Le jeu de la recherche d'égalité

Ensuite, le professeur propose un jeu d'équipe (deux élèves contre deux élèves). Chaque équipe possède trois lames-masses (trois nombres) à placer sur la balance. Les équipes posent un nombre l'une après l'autre. L'enjeu est de maintenir l'équilibre. Au début, les élèves n'identifient pas et n'utilisent pas les nombres indiqués sur les crochets de la balance. Ils observent les mouvements crées par les ajouts successifs puis ils mémorisent l'emplacement des nombres. Ils placent alors les lames-nombres exactement au même endroit que les lames-nombres positionnées par l'équipe adverse. Cela indique au professeur le temps du changement de jeu.

2) Le jeu de la balance retournée, nombres invisibles

La balance est retournée. Les nombres ne sont donc plus visibles. Maintenant, l'équipe du nombre inconnu ne possède plus qu'une seule lame-nombre. L'autre équipe a toujours trois lames-nombres, le professeur, lui, possède deux lames-nombres.

Le but du jeu consiste, pour l'équipe qui a trois lames-nombres, à les placer sur le bras de la balance (du côté près de l'équipe). Le professeur fait constater le déséquilibre (le côté avec les nombres, les masses penche vers la table). Le professeur place deux lames-nombres de l'autre côté de la balance (dans un premier temps, il choisit deux nombres identiques sur les trois nombres placés par les élèves de l'équipe de départ).

L'équipe adverse avec une lame-nombre unique (le nombre-inconnu) doit d'abord faire une proposition orale « Nous pensons que c'est le nombre x qui permet d'équilibrer ». Puis la validation se fait avec le positionnement de la lame-nombre (la masse) sur le bras de la balance. L'équipe du nombre inconnu a une seule « chance » (une seule proposition peut être faite), afin d'étudier les réajustements et favoriser le jeu « du plus ou du moins ». Les élèves constatent que le déplacement de la lame-nombre en avant ou en arrière par rapport à l'axe vertical (le pied d'appui) produit un mouvement avec des écarts (« plus haut », « plus bas ») et des « états » d'équilibre et/ou de déséquilibre.

Nous allons maintenant décrire en substance le processus de diffusion des connaissances dans la classe, de la « cellule de diffusion » que constitue le groupe Anticipation, au reste de la classe, avant d'en venir à l'analyse spécifique de ce processus.

2.4 La cellule de diffusion

Nous choisissons de montrer la même photographie deux fois avec des annotations différentes. Premièrement, nous identifions les zones occupées par les différentes instances : le groupe d'anticipation, la classe et le savoir concrétisé par/dans la balance (elle est la preuve). Les trois bulles numérotées 1, 2 et 3 représentent les trois Instances (la balance numérique, les quatre élèves du groupe d'anticipation, la classe). Le professeur n'est pas visible sur la photographie mais il se trouve au fond de la classe. Il prend la photographie.

Les quatre élèves du groupe d'anticipation et la balance numérique

Photographie n°2, le groupe d'Anticipation (cellule de diffusion)

Date, le 25 avril 2014

légende :

*1 : la balance numérique

*2 : les quatre élèves du groupe d'anticipation

*3 : la classe

Maintenant, la même photographie tente de rendre compréhensible l'avancée du savoir. Celui-ci n'est plus simplement représenté par la balance mais il est « dans » les élèves du groupe d'Anticipation (la cellule de diffusion). Ceux-ci vont en effet expliciter les règles définitoires à tous les élèves. Le groupe d'anticipation rend compte ainsi des expériences qu'il a vécues.

Le groupe d'Anticipation, des
« élèves éclaireurs » de la cellule de germination

Photographie n°2 bis, le groupe d'anticipation (cellule de diffusion)

Date, le 25 avril 2014

Le groupe d'Anticipation explique à la classe le rôle de « la balance numérique » et réalise une première partie de jeu. Nous sélectionnons cette séance (avant les vacances de printemps) pour explorer la manière dont les élèves élaborent la notion d'égalité dans le module 10.

3. LES PHÉNOMÈNES DE CONTAGION A L'INTÉRIEUR DU GROUPE D'ANTICIPATION

Nous présentons la situation que nous allons analyser dans cette section. Il s'agit de la séance 1 du groupe d'anticipation. Nous rappelons que les quatre élèves ainsi que le professeur sont au fond de la classe. Ils vont travailler à partir de la balance numérique. Elle n'a pas été présentée, ni en petit groupe, ni à la classe. Toutefois, les élèves ont étudié la balance de type Roberval en sciences, au sein d'une activité qui consistait à déterminer entre deux objets lequel était le plus lourd et/ou le plus léger. Le reste des élèves de la classe travaille en autonomie dans le Journal du Nombre.

Nous avons sélectionné la transcription spécifique rattachée à la découverte du fonctionnement de la balance mathématique ainsi que des extraits de la mise en œuvre des jeux susceptibles, pensons-nous, d'aider l'élève dans l'élaboration d'un arrière-plan nécessaire à l'anticipation du jeu en grand groupe.

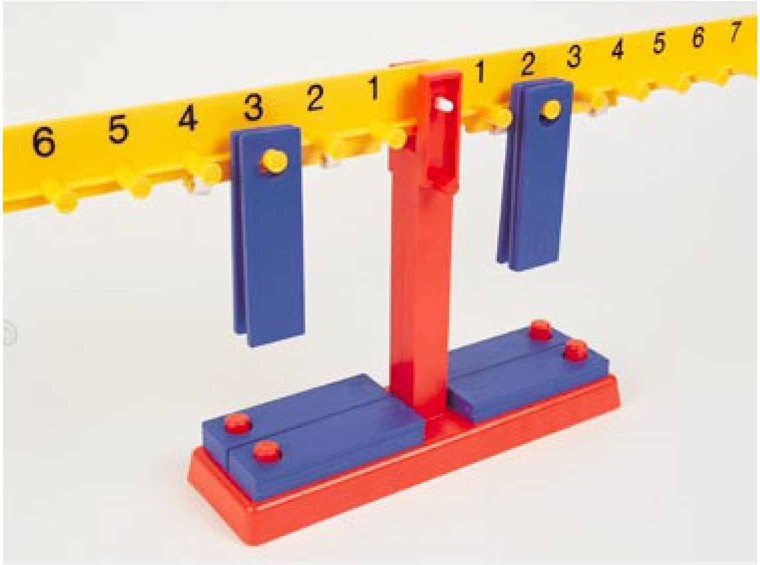
La transcription retrace dix-huit minutes de la séance d'anticipation 1 avec la construction d'un rapport spécifique à l'objet, « Le Nombre inconnu » du module 10. Le professeur cherche à faire en sorte que les élèves devancent le temps didactique pour rendre l'élève capable de jouer le jeu. C'est ce que nous allons observer dans la transcription ci-dessous.

3.0 Mise en intrigue de la séance d'anticipation avec la balance numérique

Il s'agit de la première séance de découverte de la balance dans laquelle les élèves vont explorer son fonctionnement par la rencontre avec les différents éléments présents dans le milieu-recherche (les masses, les nombres, le « bras » de la balance, les crochets/bâtons). La mise en relation des éléments et le fonctionnement de la balance provoquent le jeu de « la recherche de l'équilibre ». L'enquête se poursuit et amène les élèves à constater un autre déséquilibre, non plus dans « l'alignement » de la balance mais dans le nombre de termes (les masses accrochées) présents sur la balance.

3.1 En quoi et comment le devancement du temps didactique est opéré en appui sur les comportements effectifs du professeur et des élèves

Les transactions didactiques s'expriment dans un milieu spécifique, fondé sur la balance numérique présentée ci-dessus. Nous la représentons pour mémoire une nouvelle fois ci-dessous.



La transcription que nous allons maintenant étudier nous montre des élèves et un professeur dans un milieu-recherche constitué par l'artéfact « balance numérique ». Observons les premiers tours de parole :

*Tdp 4, E(Isabelle) : ça pouvait être/heu/de 1 en 1 peut-être/parce qu'il y a un/et ensuite on rajoute un/ça fait deux/**rires***

Ici, l'élève avancée, Isabelle, pointe le regard sur l'ordonnance des nombres figurant sur la barre transversale jaune (les « bras », ou « fléau » de la balance). Elle montre que les nombres sont rangés du plus petit au plus grand et que l'écart entre deux nombres est toujours de un. Les nombres sont donc ordonnés et chaque nombre est suivi de son successeur. Le professeur parle à son tour, des nombres puisque les élèves parlent des nombres et il demande :

Tdp 8 P : alors/ils vont de combien en combien

C'est Isabelle qui va répondre à nouveau au professeur et elle indique les limites des nombres inscrits sur les bras de la balance.

Tdp 9, E (Isabelle) : de 10 à 1/enfin de 1 à 10

Elle confirme ainsi l'ordonnance des nombres et en précise les limites. Elle montre l'espace numérique « affiché » sur les bras de la balance. De plus, l'écriture des nombres peut être lue de gauche à droite ou de droite à gauche et indiquer alors l'ordre croissant ou décroissant (du nombre le plus grand au plus petit ou inversement). Le professeur pense qu'il est temps d'orienter le regard sur un autre élément du milieu-recherche. Il pose la question suivante :

Tdp 12, P : d'accord/bon/qu'est-ce qui y a d'autre encore

La réponse de Isabelle est la réponse attendue par le professeur.

*Tdp 13, E (Isabelle) : y a ça (**Isabelle désigne les masses**)*

Isabelle attire maintenant l'attention du groupe sur un élément appartenant au milieu-recherche de la situation. Elle ne sait comment nommer cet élément. Elle le montre donc avec son doigt. Isabelle semble penser que si cet objet est là, s'il est présent dans le milieu-recherche, c'est qu'il sert nécessairement à penser le problème. C'est la vision de la situation par l'élève avancée du groupe.

Nous notons que pour l'instant, les autres élèves du groupe ne sont pas intervenus.

Le professeur décide alors de faire avancer le temps didactique. Les masses sont un élément important mais il faut en expliciter l'usage. Il ne « perd » pas de temps à nommer les masses. Il cherche à attirer l'attention sur un autre élément du milieu-recherche qu'il va même nommer :

Tdp 14, P : sur la partie orange/qu'est-ce qui y a d'autre encore/y a pas que des nombres

Tdp 15, E (Isabelle) : des chiffres

Les regards des quatre élèves et du professeur se fixent alors sur la barre orange. Le professeur s'est exprimé pour orienter avec précision les élèves dans le « milieu-artéfact » que constitue la balance. Désormais, il laisse la place. Isabelle va lui proposer « des nombres » (au tdp 15, « des chiffres »). Il répond oui mais ce n'est pas la réponse attendue. Il poursuit : « oui mais encore. » Les nombres ne sont pas la réponse attendue par le professeur puisque celle-ci a déjà été travaillée. Isabelle continue et propose :

Tdp 17, E (Isabelle) : y a des bâtons

Tdp 18, P : c'est quoi des bâtons

C'est à partir de la réponse de Isabelle « les bâtons » et le retour de la question du professeur : « c'est quoi des bâtons » que nous voyons un nouvel élève s'introduire dans la discussion. Il s'agit de *Richard*. Nous reproduisons les quelques tours de parole qui semblent créer un épisode didactique de diffusion.

Tdp 19, E (Isabelle) : c'est ça là

Tdp 20, E (Richard) : en fait/c'est pour calculer

Tdp 21, P : les bâtons/ils servent à calculer

*Tdp 22 ,E (Richard) : oui/c'est pour faire des bonds/**Richard pose son doigt sur un bâton (un crochet en fait) et saute**/bing*

Tdp 23, P : ha oui

Tdp 24, E (Richard) : pour faire des bonds

*Tdp 25, E (Isabelle) : ou alors/pour mettre ceux-là ici/**Isabelle parle des masses à accrocher aux crochets***

L'échange nous paraît intéressant sur plusieurs points. Il met en évidence le rôle particulier de l'élève avancée (Isabelle) comme « traducteur » des énoncés du professeur. Isabelle comprend et décode les signes du milieu-recherche attendus par le professeur et, ce faisant, aide selon nous à une compréhension collective.

Pour comprendre cela, observons de plus près l'échange reproduit ci-dessus, dans lequel Richard fournit au groupe un élément essentiel à l'orientation dans le milieu-recherche. Il peut le fournir puisque Isabelle et le professeur ont permis la construction de l'arrière-plan nécessaire pour jouer au jeu.

En effet, Isabelle répond à la question du professeur « C'est quoi des bâtons ? » puisqu'elle confirme ce que représente les « bâtons ». C'est ce que nous montre le tdp 19 ci-dessus : « c'est ça là ». Cette réponse indique de manière déictique ce qui représente les bâtons sur la balance. L'élève caractérise l'objet « balance » et s'attache à définir de manière ostensive le terme « bâton ».

Il est intéressant de noter alors la réponse de Richard, élève silencieux jusqu'à cet épisode. Il s'exprime et donne au groupe la fonction des « bâtons ».

Le tdp 20, E (Richard) : en fait/c'est pour calculer

Il va même jusqu'à préciser.

*Tdp 22, E (Richard) :oui/c'est pour faire des bonds/***Richard pose son doigt sur un bâton (un crochet en fait) et saute***/bing*

Et il termine par ces mots :

Tdp 22, E (Richard) : pour faire des bonds »

Il semblerait que Richard, grâce à la première construction de l'arrière-plan établi, associe la balance mathématique à l'usage identique de la ligne graduée. Nous formulons cette hypothèse puisque Richard emploie l'expression « faire des bonds », utilisée pour la gestion de la ligne graduée.

Le professeur ne confirme aucune des propositions. Il laisse jouer. Il propose simplement à Isabelle d'essayer.

Tdp 26, P : ha/alors bon/on va essayer/faut j'essaie de la/

Isabelle n'est pas exactement sur la même idée que Richard comme nous le voyons :

*Tdp 25, E (Isabelle) : ou alors/pour mettre ceux-là ici/***Isabelle parle des masses à accrocher aux crochets***

Nous remarquons que Richard a pointé précisément les fonctions des « bâtons » et de la barre orange pour « calculer des nombres ». Isabelle va de nouveau orienter le groupe sur l'utilisation des masses (les lames-nombres) avec la balance, c'est-à-dire sur le « *comment jouer »* au jeu demandé.

*Tdp 29, E (Isabelle) :parce qu'on peut mettre ceux là (les masses) ici/***Isabelle fait un mouvement de bascule avec ses deux mains***

Le mouvement des deux mains de Isabelle provoque la question du professeur.

Tdp 30, P : ça sert à quoi une balance/

Le professeur cherche à user de la comparaison « balance classique (connue) et balance numérique » dont l'enjeu serait les règles définitoires du « comment jouer » avec la balance numérique.

L'épisode didactique qui fait suite semble montrer l'avancement du temps didactique avec l'investissement du milieu-recherche par un nouvel élève (Mathieu).

Tdp 31, E (Mathieu) : à calculer les nombres/

Tdp 32, E (Isabelle) : pas que/ en fait

Tdp 33, E (Mathieu) : à calculer des grands nombres

Tdp 34, E (Isabelle) : non/des fois/ça sert pas à ça/ça sert à/on met un truc dessus et puis/on regarde qu'est-ce qui est le plus lourd et là/c'est/c'est une balance

Tdp 35, P : alors comment va-t-on s'en servir parce que

L'extrait nous montre deux élèves dont l'échange concerne d'une certaine manière deux types de balance. Le professeur s'exprime pour demander le « comment on y joue ». La différence de compréhension de l'instrument, et, à travers elle, la différence de compréhension du contrat didactique entre les deux élèves (Isabelle et Mathieu) est décisive pour l'avancée du temps didactique. Regardons cela dans les six tours de parole suivants :

Tdp 35, P : alors comment va-t-on s'en servir parce que

Tdp 36, E (Isabelle) : ben on/

Tdp 37, P : parce que/est-ce qu'on va pouvoir poser des choses/(sur les plateaux)/y a pas de plateaux

Tdp 38, E (Isabelle) : non/ y a/mais les bâtons en fait

Tdp 39, E (Mathieu) : ici

Tdp 40, E (Isabelle) : ça sert à mettre/les trous ici/là/qui/ les trucs qui sont là/he ben

Le professeur demande en quelque en sorte (Tdp 35) : « comment va-t-on pouvoir jouer avec la balance posée sur la table ? » Isabelle semble hésitante « ben/on... » . Que fait le professeur ? Il s'exprime à nouveau, au Tdp 37, pour faire remarquer que la balance ne possède pas de plateaux.

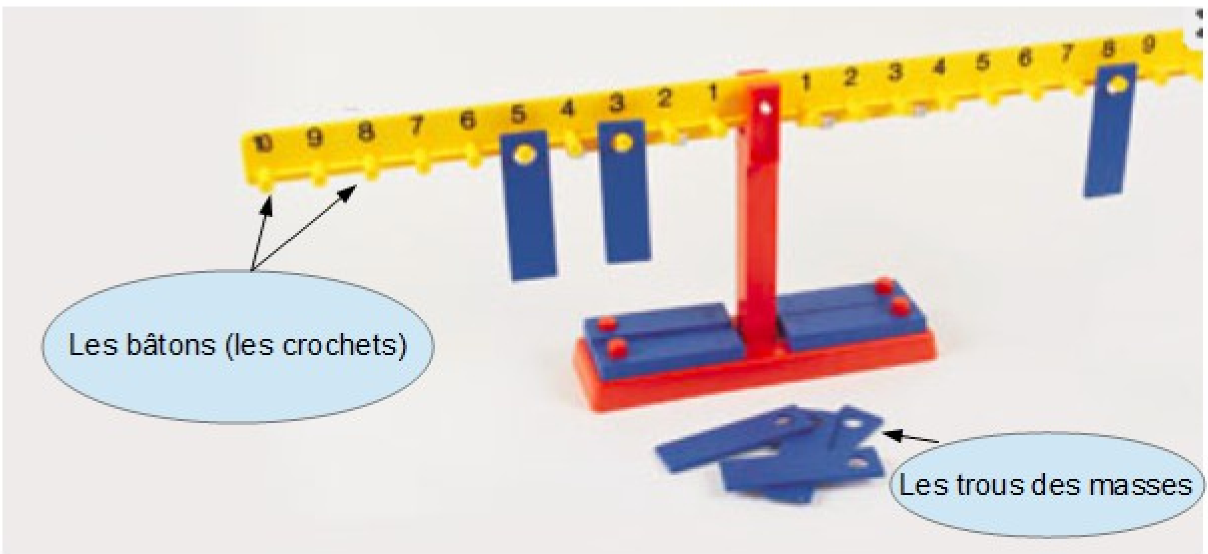
Il semble désormais y avoir chez Isabelle et Mathieu une seule et même compréhension de l'instrument. Les deux élèves indiquent de manière différente l'importance du crochet pour les masses.

Tdp 38, E (Isabelle) : non/ y a/mais les bâtons en fait

Tdp 39, E (Mathieu) : ici

Isabelle termine l'épisode par la correspondance qu'elle établit entre les bâtons (les crochets/le « ici » de Mathieu) et le trou des masses. Nous donnons à voir une photographie de la balance numérique avec le système des crochets/trous (nommé « bâtons/trous par les élèves »).

La balance mathématique



L'extrait qui suit concerne la découverte du mouvement provoqué par la masse accrochée sur la balance. Nous étudions les tours de parole de 96 à 105. Nous sommes à 4 minutes 14 du début de la séance.

Tdp 96, P : alors/hein/toi/tu dis que/on s'en sert comment alors

*Tdp 97, E (Isabelle) : ben/on met ici en fait/**Isabelle accroche une masse sur un crochet**/et là/ça met dix*

Tdp 98, P : alors/c'est normal/c'est normal que ça penche ?

Tdp 99, E (Mathieu) : oui/

Tdp 100, Es : oui

Tdp 101, E (Isabelle) : oui/parce que ça/c'est lourd

Tdp 102, E (Richard) : oui

Tdp 103, E (Isabelle) : et puis/et y a dix en fait/heu/heu

*Tdp 104, E (Mathieu) : **rires/il a posé de son côté une autre masse sur pour équilibrer***

*Tdp 105, P : alors qu'est-ce qui se passe/**rires/Richard veut aussi poser une masse de son côté et Timéo veut en faire autant/**non/non/attendez/on regarde/on regarde/*

Dans cet extrait, Isabelle, élève avancée, a relié le « trou » de la masse et « le bâton » (le crochet) pour recevoir la masse. L'élève formule l'explication puis elle réalise la démonstration : « ben/on met ici en fait/ et là/ça met dix » (tdp 97). Le professeur attire l'attention sur l'effet produit par la masse accrochée sur la balance : « alors/c'est normal/c'est normal que ça penche ? » (tdp 98). Tous les élèves du groupe d'anticipation sont d'accord « oui » (tdp 100) et Isabelle explicite le pourquoi du déséquilibre : « oui/parce que ça/c'est lourd ». Richard confirme que c'est lourd : « oui ». (tdp 102).

Mais que fait Mathieu ? Il a déposé à l'autre extrémité de la balance une masse sur le nombre dix. Il rit du bon tour réalisé. La balance ne montre plus de déséquilibre. Le milieu-recherche est investi par tous les élèves (même par Timéo) pour jouer au jeu de « la recherche de l'équilibre ».

Nous sélectionnons un dernier extrait (tours de paroles 375 à 381, durée deux minutes). Le jeu consiste à faire le même nombre que l'équipe adverse avec la contrainte de placer les nombres (les masses) à des endroits différents sur la balance. Il s'agit de représenter le même nombre-tout. L'équilibre semble être difficile à obtenir puis il se réalise à partir d'un déséquilibre d'une autre nature. Nous précisons que l'équipe A a positionné trois nombres (trois masses sur la balance) puis le professeur a retourné la balance (les nombres n'étaient plus visibles) pour l'équipe B. Richard a fait des essais. Il est arrivé à équilibrer avec deux nombres (deux masses).

Tdp 375, E (Timéo) : he ho

Tdp 376, E (Richard) : juste deux nombres

Tdp 377, P : he alors/est-ce qu'on a/est-ce qu'on a/

*Tdp 378, E (Isabelle) : ben/c'est bizarre/là on a deux barres et là/on a trois/**Isabelle parle des masses***

Tdp 379, E (Richard) : parce que c'est bien égal/c'est bien égal à ce nombre

*Tdp 380, P : on regarde alors/ **le professeur tourne la balance**/est-ce que c'est vrai*

Tdp 381, E (Isabelle) : c'est pas les mêmes/par contre/c'est bizarre

Le « juste deux nombres » de Richard correspond à la réussite de l'équilibre. Il est obtenu avec deux masses contre trois. Isabelle parle d'un déséquilibre mais il est important de constater que ce n'est plus le déséquilibre de la balance. Il concerne les nombre de masses différents entre les deux bras de la balance. Elle pointe ici ce déséquilibre : « *ben/c'est bizarre/là on a deux barres et là/on a trois/**Isabelle parle des masses** »* (tdp 378)**.** Pourtant, la barre orange (le fléau de la balance) est « droite » et en équilibre.

A cela, Richard répond : « *parce que c'est bien égal/c'est bien égal à ce nombre »* (tdp 379). Il produit un geste des mains qui désigne le nombre sur chaque un bras de la balance. Pour Richard, il n'y a pas de doute, l'équilibre prouve le même nombre donc l'égalité. Le professeur propose alors de tourner la balance pour comparer les nombres. Isabelle compare rapidement les nombres et dit : « *c'est pas les mêmes/par contre/c'est bizarre ».* Elle semble se fixer sur les termes différents de l'écriture additives (concrétisés ici par le nombre de masses) et non sur le (même) nombre-tout (le calcul de la somme des masses) d'où son étonnement « *par contre/c'est bizarre ».* Nous sélectionnons deux tours de parole qui montrent les explications de Isabelle au groupe :

Tdp 1, E (Isabelle) : que je sais/en fait/6 + 4/égal le même nombre que/2 + 3 + 5/parce que /parce que/en fait ça/en fait ça/

Tdp 5, E (Isabelle) : ça/ça fait 10 et ça/ça c'est/ça en fait on double pour faire 5/on a pris le 5 du 6/on a mis le 1 au 4

Isabelle recherche le calcul de la somme des deux nombres (6 + 4) et la compare à la somme des trois nombres (2 + 3 + 5). Pour cela, elle met en œuvre la stratégie « voir un nombre dans un nombre » et voit le nombre 6 comme 5 + 1. Ensuite, elle groupe le 4 avec le 1. Elle obtient l'écriture additive 5 + 5 pour le nombre 10 qui peut se décliner en 2 + 3 + 5. Il s'agit bien du même nombre, le nombre 10.

4. BREFS ÉLÉMENTS DE DISCUSSION

Les élèves se sont rendus capables peu à peu de jouer le jeu de la « balance numérique ». Si les élèves avaient été pris dans le défilement normal du temps didactique classique, sans l'espace du groupe d'anticipation pour étudier et chercher dans leur propre durée et sans l'aide de l'élève avancée, ils auraient pu être décrochés. Le groupe d'anticipation semble avoir permis le devancement du temps didactique. Nous allons rechercher les effets dans la séance en grand groupe.

5. DES PHÉNOMÈNES DE CONTAGION À L'INTÉRIEUR DE LA CLASSE INITIÉS PAR LE GROUPE D'ANTICIPATION

Le groupe d'anticipation et le professeur ont étudié ensemble la notion d'équilibre à partir de la balance numérique dont l'enjeu est de permettre aux élèves moins avancés du groupe de devancer le temps didactique. Les différents petits jeux ont donc permis de montrer les différents déséquilibres propres à la balance : par exemple, un nombre de termes différents pour un même nombre (2 + 3 + 5 = 5 + 5 = 10) ou un même nombre de termes qui désigne un nombre différent (5 + 4 ≠ 9 + 1, ce n'est pas le même nombre). L'enquête dans le milieu-recherche s'oriente donc la recherche de l'équilibre (ici, avec l'ajout de un : 5 + 4 **+ 1**).

Maintenant, le groupe d'anticipation va expliciter le travail réalisé aux autres élèves de la classe. La classe va, à son tour, réaliser l'étude de la balance à partir des orientations des quatre élèves du groupe d'anticipation. Lors de cette phase de diffusion des connaissances étudiées dans la séance d'anticipation vers la classe, le professeur est plutôt en retrait. Les explorations à réaliser avec la balance vont permettre l'étude du mouvement équilibre/déséquilibre et sont à relier avec les différentes stratégies de calculs.

5.0 Mise en intrigue de la séance collective : le groupe d'anticipation, une cellule de diffusion

Les élèves ont rangé leur Journal du Nombre. Ils ont leur ardoise posée sur leur table. La classe découvre la balance numérique avec les quatre élèves du groupe d'anticipation présents devant le tableau. Le professeur prend la parole pour leur demander de décrire l'instrument (la balance) avant d'expliciter son fonctionnement (comment on y joue). Richard prend la parole et dit : « Ce n'est pas une balance pareille aux autres ».

Pour l'analyse, les tours de parole suivants sont issues de la transcription de la séance collective avec la balance numérique.

5.1 En quoi et comment le devancement du temps didactique est opéré en appui sur les comportements effectifs du professeur et des élèves

Le professeur a demandé au groupe d'anticipation de décrire la balance avant d'expliciter comment on y joue.

Tdp 3, P : d'abord j'aimerais que vous nous expliquiez/le/l'objet qui est devant vous/et après vous nous expliquerez comment on y joue/mais dans un premier temps/

C'est Richard qui prend la parole et que fait-il ? Il ne décrit pas l'objet proprement dit. Il centre l'attention des élèves de la classe sur les spécificités de la balance numérique par la monstration de deux caractéristiques : elle n'est pas pareille et elle a des nombres.

*Tdp 4 (3mn50), E(Richard) : c'est une balance en fait/qui n'est pas pareille que les autres/celle-ci/y a les chiffres en fait/**Richard se déplace pour montrer les nombres qui sont face au groupe**/ici/regardez qu'est-ce que ça fait/10/**Richard a accroché une masse**/ici/regardez qu'est-ce que ça fait/10/**Richard a accroché une masse**/*

Richard ne décrit pas chaque élément de la balance avec « l'histoire » des bâtons et des trous. Il pointe simplement la spécificité de la balance « pas pareille ». Comme il est derrière la balance, il se déplace afin de montrer précisément la partie de la balance qui contient les nombres. Ensuite, il enchaine avec l'ajout d'une masse qui crée le déséquilibre. Il prévient alors la classe toujours au tdp 4 : « *ici/regardez qu'est-ce que ça fait/10/**Richard** a **accroché une masse**/ ».* Mais la rupture de l'équilibre est provisoire et Richard montre le « rétablissement » : « *ici/regardez qu'est-ce que ça fait/10/**Richard** a **accroché une masse**/ »*

L'intervention de Richard est courte mais précise. La classe sait que la balance ne sert pas à réaliser des pesées mais comprend tout de même un mouvement de « bascule. » Isabelle et Mathieu vont confirmer de manière différente les propos de Richard. Isabelle traduit avec des mots la démonstration de Richard.

Tdp 5, E (Isabelle) :he oui/en fait/c'est parce que/si on met par exemple/celui-la/un encore sur/encore sur le heu/

La vidéo montre Isabelle utilisant ses mains pour expliquer que si on met une masse à une extrémité de la balance et si on réalise la même chose de l'autre côté, le mouvement de la bascule s'annule ce que confirme Mathieu.

Tdp 6(4mn03), E (Mathieu) :là/il est équilibré

Isabelle va reprendre l'explication de Richard. Pour cela, elle va utiliser le travail spécifique de Richard et continuer l'élaboration de l'exemple spécifique. La situation est la suivante : il y a deux 10 sur la balance qui ont été posés par Richard.

Tdp 7, E (Isabelle) : sur le 8/et bien/ça va pencher/parce que/**Isabelle *a accroché une masse sur le 8***/parce que/8 + 10/c'est plus que 10/

L'épisode semble essentiel La balance montre évidemment un mouvement d'équilibre et de déséquilibre mais Isabelle fournit à la classe l'explication au mouvement physique puisque l'ajout de 8 enclenche un basculement « parce que/8 + 10/c'est plus que 10/ » (tdp 7).

Richard et Mathieu vont clore l'épisode de la présentation de la balance numérique par la confirmation de la recherche de l'enjeu. Richard dit d'abord son accord à l'argumentation de Isabelle :

Tdp 10, E (Richard) : « Oui/et si on met 8/ça sera le même principe en fait/ »

Puis les deux élèves recentrent sur l'enquête à mener dans le milieu-recherche.

Tdp 14, E (Richard) : « on a équilibré en fait »
Tdp 16 (Mathieu) : « le but du jeu/c'était de/de équilibrer la balance/ »

Il est temps pour le professeur de revenir sur le devant de la scène pour donner le signal de la première enquête. Il se saisit des propos des élèves pour clore définitivement le temps de la présentation de la balance.

Tdp 17, P : « et ça veut dire quoi ? »

Le professeur fait l'hypothèse que sa demande de précision sur « l'équilibre » va conduire le groupe d'anticipation à expliciter les règles définitoires du jeu de l'équilibre. Étudions ce qui se passe dans la phase suivante.

Tdp 18, E (Isabelle) : « y avait quelqu'un/y avait une équipe en fait/pis la balance de dos/et pis/ »

Tdp 20 (4mn57), E (Isabelle) : « en fait/ils choisissaient trois nombres/et ils mettaient/heu/sur une barre/les trois nombres qui sont là/et puis les autres/ils essayaient de faire/pareil/mais sans avoir les mêmes nombres/ »

Ici, nous observons un « mélange » des différents jeux liés aux choix du professeur de faire devancer le temps didactique par les élèves. Le professeur, par sa demande (*Tdp 17, P : « et ça veut dire quoi ? »)*, amène l'élève à préciser qu'il faut « faire pareil », mais « sans avoir les mêmes nombres » (tdp 20). Le groupe d'anticipation va ensuite s'exprimer sur l'expérience de cette recherche.

Tdp 23, E (Richard) : « c'était dur »
Tdp 25, E (Mathieu) : « non/c'était facile »
Tdp 26, E (Isabelle) : « ben non/pas trop facile/parce que/quand même/il fallait trouver/un autre moyen de/de/ »

L'étude des remarques produites par ces trois élèves donne, selon nous des informations sur leur rapport au savoir. Richard semble ne pas avoir confiance en lui et trouve « dur. » Pourtant, la synthèse produite par Richard est performante même si elle est en appui sur les mouvements réels de la balance. Mathieu semble moins avancé. Il participe toutefois puisque cela ressemble à un « vrai » jeu. Tandis que Isabelle traduit les énoncés du professeur et trouve que cela n'est pas si facile. Nous n'entendons pas Timéo. Il se fait très discret.
Puis les élèves du groupe d'anticipation vont chercher à expliciter l'origine de la difficulté rencontrée à partir d'un exemple.

Tdp 28, E (Isabelle) : « de/de/de faire/par exemple/si cela faisait 10/on mettait 9 + // »

L'élève montre à la classe où se situe l'origine de la difficulté, c'est-à-dire le problème à résoudre. Isabelle évoque le nombre 10 et parle ensuite du nombre 9. Un élève de la classe a compris que le mouvement de bascule semble lié à la recherche d'un nombre-complément. C'est pourquoi il propose le nombre-partie : 1 (9 + **1** = 10).

Tdp 29, E (un élève de la classe) : 1

Tdp 30, E (Isabelle) : « +1 »

Tdp 32, E (Isabelle) : « mais un moment/et il faudrait/qu'on met pas sur le 9/et pas sur le 1/et pour faire 10 »

Tdp 34 (5mn38), E (Richard) : « y avait une autre facilité/on faisait/un moment/j'ai/j'ai mis/de ce côté/et c'était le nombre égal/en fait/donc/elle s'est mis/elle s'est mis équilibrée/ »

Isabelle évoque au tdp 32, un jeu réalisé lors d'une séance d'anticipation dans lequel la situation imposait aux nombres-parties de l'équipe B de ne pas « occuper » la même place que les nombres-parties de l'équipe A. Par exemple, la décomposition 6 + 4 devait amener à proposer 7 + 3 mais également 5 + 2 + 2 + 1. Il n'existait pas de contrainte sur le nombre de termes (de masses) pour la

recherche de l'équilibre.
Quant à Richard, il raconte l'expérience de son équipe (avec Isabelle). Lorsque Mathieu et Timéo ont déposé trois nombres « moyens » sur le fléau de la balance. Richard va équilibrer avec deux grands nombres. Ils sont équivalents.

La classe arrive ainsi dans le chœur du problème. Des nombres, parfois pareils et parfois pas pareils vont désigner le même nombre-tout montrés par l'équilibre de la balance.

Le professeur insiste sur ce que signifie « équilibrer ».

tdp 35, P « alors quand vous dites/elles s'est mise équilibrée/ça veut dire quoi/ »

Le professeur cherche à élaborer la réciprocité des expériences construites par les élèves à la fois, avec la balance et les calculs et inversement avec les répertoires additifs mémorisés et les explorations de l'instrument. Puisque 10, c'est pareil que 9 + 1 (exemple cité par les élèves précédemment). On pourrait donc expliciter les intentions du professeur comme l'incitation à la recherche de la preuve sur la balance par des relevés d'indices (le constat sur la balance).

Tdp 36, E (Isabelle) : « équilibrer/ça veut dire quand la barre est toute droite/ »

Un élève, Jean-Louis intervient. Il n'appartient pas au groupe d'anticipation. Regardons ce qu'il dit avoir compris de la situation.

Tdp 40, E (Jean-Louis) : « moi/j'ai compris le but du jeu »
Tdp 45, E (Jean-Louis) : « je sais pas/mais en fait/au début on doit lancer le dé »
Tdp 46, P : « oui »
Tdp 47, E (Jean-Louis) : « et puis après/l'autre équipe lance le dé/ »
tdp 48, E : « et si ça fait zéro »
Tdp 49, E(Arhthur) : « et puis on essaie d'équilibrer »
Tdp 50, P : »oui »
Tdp 51, E (Timéo): « et si ça fait zéro/et si ça fait zéro »
Tdp 52, E(Richard) : « ça fait rien »
Tdp 55, E (Jean-Louis) : « et un autre tiret y a 6 mais en fait/il faut essayer d'équilibrer la balance/ »
Tdp 56, P : « oui »
Tdp 57(7mn19), E (Jean-Louis) : « si ça fait 3 et 3/les deux équipes/et ben du coup/c'est équilibré »
Tdp 58, E (Isabelle) : « ben non/c'est pas tout// »

Lorsque le professeur demande à Jean-Louis ce qu'il a compris, il semble reculer : *« je sais pas/mais en fait/au début on doit lancer le dé »(tdp 45.* L'élève évoque un lancer de dé pourtant non précisé par les élèves du groupe d'anticipation. Il se peut qu'Jean-Louis ait regardé de loin ce qui se déroulait dans le « territoire » du groupe d'anticipation. L'épisode montre que Timéo, qui semblait absent des échanges, suit pourtant ceux-ci. Il oriente à son tour l'enquête par la question : *« et si ça fait zéro/et si ça fait zéro » (tdp 51).* Il est intéressant de noter que la réponse à sa question est fournie par Richard, élève du groupe d'anticipation, *« ça fait rien » (tdp 52).* Nous verrons que la question du nombre zéro va à nouveau se poser dans le milieu-recherche (et dans la séance). Ensuite, Jean-Louis prend l'exemple de deux équipes dont l'une fait le nombre « 6 », la seconde « 3 + 3 » et prouve l'équilibre.

tdp 55 : « et un autre tiret y a 6 mais en fait/il faut essayer d'équilibrer la balance/ »

tdp 57: « si ça fait 3 et 3/les deux équipes/et ben du coup/c'est équilibré »

L'expression « tiret » employée par Jean-Louis semble se rapporter à la forme de la masse rectangulaire suspendue au fléau. Ainsi, le « tiret » figuré par la masse indique comme un trait le nombre 6. L'expression utilisée par Jean-Louis fait penser au professeur que l'élève associe peut-être la balance et la ligne graduée.

Mais pour Isabelle, les choses ne peuvent être aussi simples.

Tdp 58, E (Isabelle) : « ben non/c'est pas tout// »

Que cherche donc à préciser Isabelle à l'ensemble de la classe ? Notons, comme nous allons le voir ci-dessous,que son intervention entraine les réactions de Richard et de Mathieu. Ils semblent comprendre ce que tente de dire Isabelle. Pour cela, nous sélectionnons les Tdp de 60 à 66 puis de 68 à 72. Ce sont deux épisodes didactiques qui donnent à voir la complexité du savoir en jeu.

Tdp 60, E (Richard) : « je rajoute une petite chose/non/nous on a le droit que tirer deux/deux fois et eux »

Tdp 61, E (Mathieu) : « nous /on a droit de tirer trois fois/et »

Tdp 62, E (Richard) : « oui »

Tdp 63, P : « oui »

Tdp 64, E (Richard) : « on doit faire le nombre qui est égal »

Tdp 65, E (Mathieu) : « et si c'est zéro/on recommence »

Tdp 66 (7mn38), E (Richard) : « oui »

Ici, le point particulièrement important est le nombre de termes. Le déséquilibre apparaît sur le nombre de termes, deux nombres contre trois nombres. A partir de ce déséquilibre, il faut chercher le nombre égal, le retour à l'équilibre. Mais l'ajout d'un autre nombre (trois termes contre trois termes) ne garantit pas forcément l'équilibre d'où la question ci-dessus de Timéo sur le zéro.

Regardons maintenant le second épisode des tdp 68 à 72.

Tdp 68, E (Isabelle) : « en fait/si par exemple/nous on fait/heu/3/ »

Tdp 69, P : « oui »

Tdp 70, E (Isabelle) :on met une barre sur le 3/on relance/ça tombe sur 7/on met sur une barre sur 7/on relance/ça met la barre sur///1

Tdp 71, P : « oui »

Tdp 72, E (Isabelle) : « on met la barre sur 1/et en fait/il faut que eux/il faut qu'ils fassent la même chose/mais sans les mêmes/heu »

Les élèves du groupe d'anticipation, sous l'impulsion de Isabelle, ont attiré l'attention de la classe sur la recherche du même nombre matérialisé par l'équilibre de la balance. Le second épisode montre, quant à lui, la nécessité des nombres-parties différents représentant toujours le même nombre.

Il semble que les élèves du groupe d'anticipation produisent des comportements de centration sur des éléments essentiels pour gagner au jeu demandé par le professeur ce qui semble bien montrer une forme de devancement du temps didactique.

5.1.1 La recherche du Nombre inconnu

La classe s'engage alors dans une partie réalisée par les deux équipes (l'équipe A est composée de Mathieu et Timéo et l'équipe B comporte Isabelle et Richard) du groupe d'anticipation.

La classe va devoir rechercher le « Nombre inconnu » sur l'ardoise. Les lancés de dé réalisés par l'équipe A sont les suivants : 4 + 2 + 3. Les élèves ont placé les nombres au fur et à mesure sur la balance. L'équipe B doit lancer deux fois le dé. Puis toute la classe recherchera le « Nombre inconnu ». Regardons comment se déroule la partie.

L'intervention de Mathieu est intéressante, il fait une constatation, après l'accrochage du premier nombre, 4. Il confirme que la balance n'est pas équilibrée (tdp 82 ci-dessous). L'expression de Mathieu sur le déséquilibre entraine une remarque de Joseph, élève « hors groupe anticipation ». Nous reproduisons les tdp de 82 à 85.

Tdp 82, E (Mathieu) : elle est pas équilibrée
Tdp 83, E (Joseph) : elle bascule
Tdp 84, (P) :pourquoi bascule-t-elle ?
Tdp 85, E (Joseph) : ben parce que/y a zéro/et de l'autre/y a 4

La remarque de Joseph au tdp 83 note le déséquilibre spécifiquement « elle bascule ». Le professeur n'explicite pas mais il renvoie la question au collectif : « pourquoi bascule-t-elle ? » Joseph commence alors à produire un énoncé de type argumentatif où il explicite qu'il y a zéro (aucune masse posée) d'un côté et le nombre quatre de l'autre côté (tdp 85).

Mathieu lance à nouveau le dé et il obtient cette fois le nombre 2. Que fait le professeur ? Pour cela, nous sélectionnons cinq tours de parole.

Tdp 90, P : « sur le 2/sur le nombre 2/c'est normal que ça reste penché toujours du même côté/ ? »

Tdp 91, E (Mathieu) : « oui/c'est normal »

Tdp 92, E (Isabelle) : « oui parce que c'est beaucoup/plus que zéro »

Tdp 93, E (Jean-Louis) : « c'est de leur côté/du coup/ils ont le droit/ »

Tdp 94, P : « c'est vrai/ »

Le professeur oriente l'attention des élèves sur le déséquilibre (tdp 90) puisqu'il demande si cela est normal que la balance penche toujours du même côté. Il sous-entend que le basculement aurait pu subir un autre mouvement. Mathieu répond au professeur que « c'est normal » (tdp 91). Isabelle répond aussi à la question du professeur mais sa réponse complète les propos échangés précédemment (tdp 85 (Joseph) « *ben parce que/y a zéro/et de l'autre/y a 4 »).* Elle poursuit et précise au tdp 92 : *« oui parce que c'est beaucoup/plus que zéro » (tdp 92).* Nous notons de nouveau l'intervention d'Jean-Louis : *« c'est de leur côté/du coup/ils ont le droit/ » (tdp 93).* Ici, nous avons un glissement. En fait, il semblerait qu'Jean-Louis justifie que les deux nombres se trouvent positionnés du même côté de la balance puisque la partie de jeu concerne l'équipe A, pour l'instant. Le professeur cherchait lui à faire préciser la « différence » de basculement.

C'est au tour de l'équipe B de lancer le dé pour déterminer les nombres. Au tdp 102, le professeur dit : « l'équipe B doit lancer deux fois/ ». C'est Richard qui lance le dé. Il obtient le nombre 1.

*Tdp 106, E (Richard) : « ha/**il rit parce que le dé lancé fait 1** »*

L'élève rit mais il pense être plutôt mal « parti ». Le nombre 1 est un petit nombre. Isabelle pense avoir une idée (tdp 112) et le professeur, lui, fait constater que la balance est toujours penchée du même côté.

Tdp 112, E (Isabelle) : « j'ai une idée »
Tdp 113, P : « attends/on va montrer aux copains/mais poussez-vous parce que les copains voient pas/ha/ça penche toujours du même côté/hein »

Quant à Jean-Louis, il justifie le déséquilibre par le nombre de nombres (3 termes contre 1 terme). Il ne s'occupe pas de la « valeur » des nombres, comme on le constate ci-dessous.

Tdp 114 (10mn37), E(Jean-Louis) : « parce que là/y en a trois/et là y en a un »

Le professeur admet alors ce fait : trois nombres d'un côté et un nombre de l'autre, c'est un déséquilibre. Il pose à nouveau sa question (cf. ci-dessus Tdp 113) et cette fois-ci, un peu différemment.

Tdp 115, P : « ha oui/y a trois nombres/et là/y a un nombre/mais //pourquoi ça reste penché par là/ ?»

Plusieurs élèves font des réponses.

Tdp 116, Es (réponse collective) : « parce qu'il y a plus »
Tdp 117, E (Joseph) : « parce que c'est le plus grand »
Tdp 118, E : « c'est le plus fort »

Puis, c'est au tour de Isabelle de lancer le dé. Elle réalise 8. Elle pose le nombre (la masse) sur la balance. Les élèves sont persuadés que la balance penche très légèrement. Puis, ils admettent que l'axe est à l'horizontale. Un bras de la balance porte donc les masses 4, 2, et 3 (total 9), et l'autre bras les masses 8 et 1 (Total 9). La balance est donc équilibrée.
Étudions ce qui se passe alors.

134, P : « alors/quel est le nombre inconnu qu'on rajoute/cherchez-le sur l'ardoise/qu'est-ce que tu proposes/il faut un troisième nombre/chut/chut/ »

Le professeur a fait constater que le fléau est à l'horizontale. Puis, il poursuit avec l'enjeu de la partie et la proposition d'un nombre pour le « Nombre inconnu », représenté par le point d'interrogation dans l'écriture additive. Les élèves font les propositions suivantes : 2, 1, 9, 5, 0, et 10.

5.1.2 Le temps du débat avec les propositions du nombre inconnu par les élèves

Considérons le débat entre les élèves, quant à la validité des nombres proposé, pour ce qui concerne le nombre 10.

Tdp 165, E (Joseph) : « je prends pas le 10 ».
Tdp 166, P : « pourquoi ? »
Tdp 167, E (Joseph) : « ben/parce que/ »
Tdp 168, E (Isabelle) : « ben on essaie »
Tdp 169 (13mn59), P : « attends/on va essayer après/c'est trop/ »
Tdp 170, E (Joseph) : « oui »

Un élève, Joseph, lève la main en proposant d'invalider la réponse 10 (tdp 165). Il répond qu'il ne prend pas le nombre 10 « parce que ... » (tdp 167) Isabelle intervient aussitôt pour préciser qu'il suffit d'essayer, c'est-à-dire explorer la proposition avec l'ajout du nombre 10 comme « nombre inconnu » à l'aide de la balance (tdp 168). Elle fait la proposition d'user de la balance comme « preuve ». Le professeur pense aussi que c'est trop (tdp 169)
C'est au tour d'une autre élève de refuser la proposition du nombre 9 comme nous le montre l'extrait suivant :

Tdp 177, P : « on en veut pas/Marie/qu'est-ce que tu barrerais aussi/ »
Tdp 178, E (Marie) : « 2 »
Tdp 179, P : « 2 »
Tdp 180, E (Marie) : « et pis 9 »
Tdp 181, P : « attends/on prend une proposition/qu'est-ce que/ »

Tdp 182, E (Marie) : « 9 »

Le professeur cherche alors à attirer l'attention sur l'écart entre les nombres 10 et 9 (tdp 183). Lors de cet échange, Nathalie va expliciter que le nombre 9 c'est moins que 10 mais c'est encore trop (tdp 186).

Tdp 183, P : « ha/essayons le 9/10 c'était beaucoup trop/alors regardons si le 9 c'est toujours beaucoup trop/ »

Tdp 184, E (Richard) : « hou »

Tdp 185, P : « houlala »

Tdp 186, E (Nathalie) : « un tout petit peu moins mais sinon c'est trop encore »

Tdp 187, P : « c'est vrai/9 c'est vrai/c'est un petit peu moins que 10/tu as raison/mais on prend pas »

Tdp 188, E (Nathalie) : « mais encore ça fait trop grand »

Le professeur s'exprime à nouveau. Il choisit d'interroger Adrien. (Tdp 189, P : « qu'est-ce qu'on prendrait pas encore Adrien ».) Et Adrien répond le zéro (tdp 190, E (Adrien) : « heu/zéro » à 14mn54). La question du zéro se pose à nouveau. Nous reproduisons ci-dessous les tdp suivants, de 191 à 198.

Tdp 191, P : « tu prends pas 0 »

Tdp 192, E (Adrien) : « oui/ça fait rien »

Tdp 193, E (Anne) : « y a pas de zéro sur la balance »

Tdp 194, P : « alors/allons-y/ha oui/y a pas de zéro sur la balance »

Tdp 195, E (Isabelle) : « mais ça fait rien du coup »

Tdp 196, E (Christophe) : « et si on fait rien/comme c'est équilibré/he bien ça va/ »

Tdp 197, P : « ha »

Tdp 198, E (Christophe) : « on a rien à faire »

L'échange semble intéressant selon nous puisqu'il montre le refus du nombre zéro pour des motifs différents.

Adrien ne prend pas la proposition du nombre zéro parce que « ça fait rien » (tdp 192). Effectivement, la balance ne subira ni mouvement et le nombre aucune modification. Quant à Anne, elle constate qu'il n'existe pas de nombre zéro sur la balance (tdp 193). Isabelle, elle s'interroge : comme la balance ne comporte pas de zéro, il n'y a pas de changement possible (tdp 195). Christophe va intervenir deux fois dans cet épisode. La première fois, il précise (tdp 196) : « *et si on fait rien/comme c'est équilibré/he bien ça va/* ». La question du zéro qui ne produit pas de mouvement n'est pas un problème puisque la balance est déjà équilibrée. A la seconde intervention, il affirme donc : « *on a rien à faire* ».

Puisqu'il n'y a pas de zéro sur la balance, la question se pose d'obtenir la preuve du nombre inconnu. Le désaccord semble important parmi les élèves, de plus, il y a des maladresses « physiques » lors des essais de nombres sur la balance (les masses à poser et/ou enlever).Sur la balance, les nombres posés sont 1 + 8 (les lancés) avec l'essai de la proposition du nombre inconnu (9) afin d'égaliser avec le nombre 9 (4 + 2 + 3) présent sur l'autre bras de la balance. L'élève ôte le 8 à la place du 9 et cela crée une petite perturbation. Le professeur redéfinit le nombre inconnu.

Le professeur propose donc de s'intéresser aux calculs. (tdp 208, P : « ha/on l'a remis/1 et 8/et ben cherchons par le calcul/1 + 8/c'est égal »). Considérons maintenant les échanges qui suivent cette proposition.

Tdp 215, P : « comment tu fais pour calculer/allez/vas-y »

Tdp 216, E (Isabelle) : « ça c'est 5 »

Tdp 217, P : « ça c'est 5/2 + 3/vous êtes bien d'accord »

Tdp 218, E (Isabelle) : « oui ».

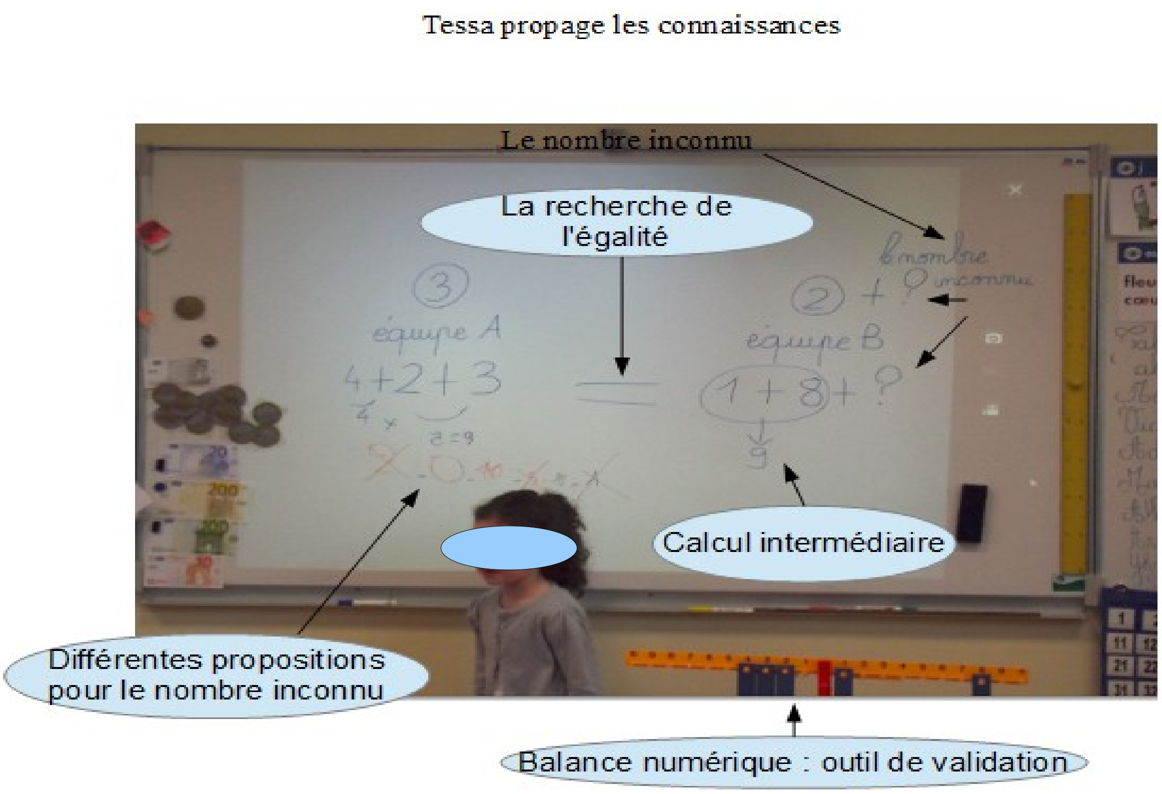
Tdp 219, P : « c'est 4 ».

Tdp 220, E (Anne) : « 5 et 4, 9

Tdp 223, E (Anne) : « oui/ça fait 9, 4 + 5 »

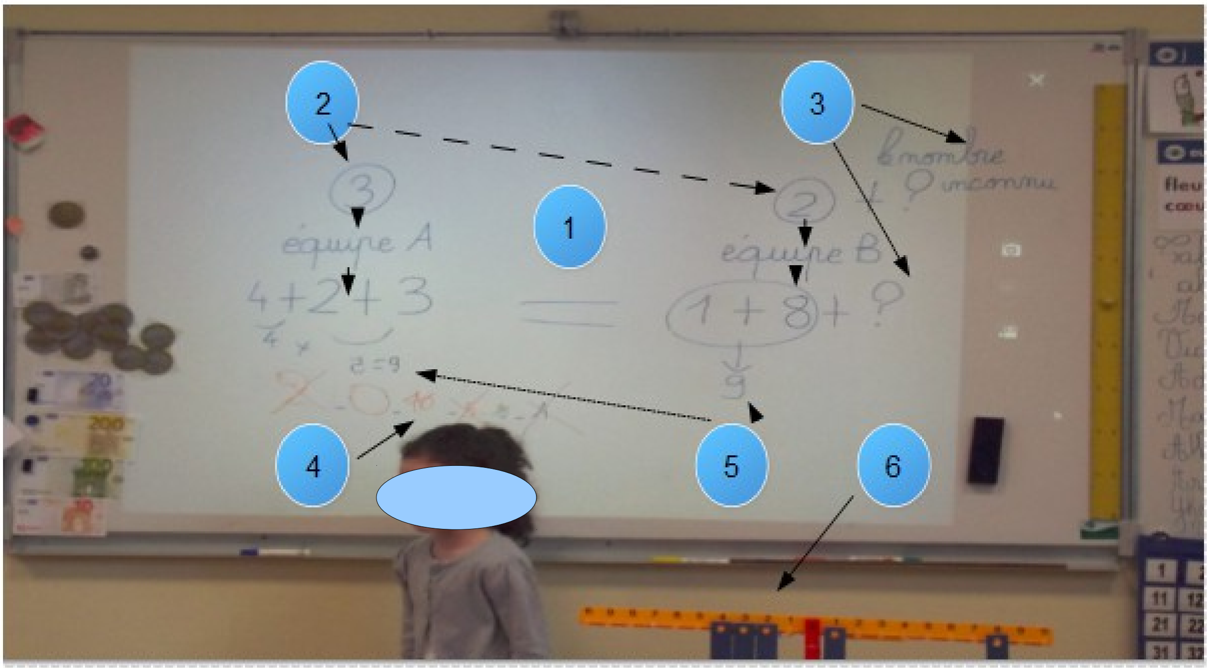
La décomposition de l'équipe A (2 + 3 + 4) est calculée en appui sur le repère du nombre 5 (Tdp 216). Ensuite, deux élèves confirment le nombre 9, Anne sous la forme 5 + 4 = 9 (Tdp 220) puis Nathalie sous la forme 9 c'est 4 + 5 (tdp 223).

Les quatre élèves du groupe d'anticipation, comme nous l'avons explicité dans le paragraphe ci-dessus, ont réalisé une partie de jeu avec la balance devant le reste des élèves de la classe. La partie jouée sert à nouveau à expliciter les règles définitoires *en situation* dans le milieu-recherche. Le tableau montre la recherche du nombre inconnu.



Photographie n°3 : la diffusion par les anticipant

Lorsque les trois nombres de l'équipe A sont égaux aux deux nombres de l'équipe B, quelles propositions pour le nombre inconnu ?



Date, le 25 avril 2014**Photographie n°3 bis, première partie avec le groupe d'anticipation**

Date, le 25 avril 2014

Légende :

1-la recherche de l'équilibre, l'égalité

2-l'équipe A (trois nombres), 4 + 2 + 3 contre l'équipe B (deux nombres), 1 + 8 + ?

3-le codage du nombre inconnu représenté par le « ? »

4-les propositions des élèves pour le nombre inconnu : 8-0-10-2-5-1

5-la recherche de la preuve avec les calculs partiels, pour l'équipe A : 4 + (2 + 3) = 4 + 5 = 9 et pour l'équipe B, 1 + 8 = 9 et la recherche du Nombre inconnu.

6-la balance numérique dans le rôle de la preuve

Le tableau de la classe nous permet d'identifier rapidement le nombre d'équipes en jeu. Elles sont au nombre de deux (équipe A et équipe B). Puis les écritures additives affichent trois termes pour chaque équipe mais l'écriture de l'équipe B possède une particularité. L'écriture additive a un point d'interrogation. Le professeur a noté la signification du point d'interrogation à côté de l'expression « Nombre inconnu ». L'attention est maintenant centrée sur le signe mathématique « = » qui relie les deux écritures additives, au milieu du tableau. L'enjeu est fortement affiché, il s'agit de la recherche de l'égalité. Nous voyons au bas du tableau, les différentes propositions des élèves pour la recherche du nombre inconnu. Les propositions erronées sont barrées pendant le débat. La classe a validé le nombre inconnu « zéro » par la balance et les calculs.

Nous avons montré que le débat dans la classe a permis d'invalider les propositions écrites sur les ardoises. Nous rappelons que l'équipe A possède les nombres 4 + 2 + 3 tandis que l'équipe B a les nombres 1 + 8. Toute la classe a recherché le nombre inconnu qui a permis l'équilibre de la balance.

A la suite de cet échange, un élève fait une proposition (Tdp 232, E (Joseph) : « maîtresse/on prend quelque chose »). Le professeur demande alors à Joseph le nombre choisi (Tdp 233, P : « qu'est-ce qu'on prend alors » et Joseph répond le nombre 2 (tdp 234, E (Joseph) : « le 2 ». La proposition du nombre 2 oriente momentanément la classe dans une fausse direction. En effet, le professeur est en train de chercher à faire des photographies du tableau, et cela provoque, sans doute une inattention de sa part puisqu'il propose :

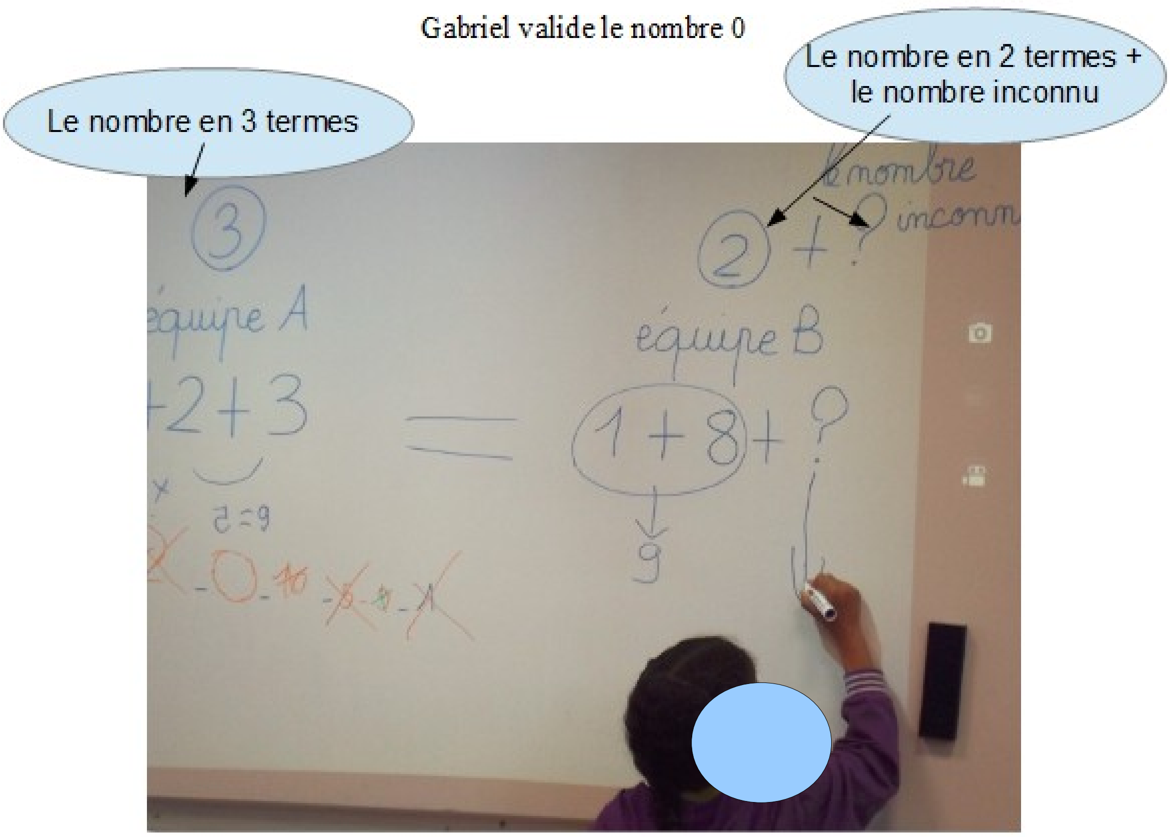
Tdp 235, P : « le 2/allez Richard/on prend le 2/entoure le 2 et barre/à vos places les quatre/on va prendre deux autres/attendez/je dois juste faire une photo et/on va prendre deux autres équipes/ »

Heureusement, les élèves sont attentifs et Isabelle n'hésite pas à questionner le professeur.

Tdp 236, E (Isabelle) : « MadameV./on prend le 2/pourquoi faire »

Maintenant, Joseph confirme que la classe doit choisir effectivement le zéro (tdp 242, E (Joseph) : « on prend le 0 » et le professeur explicite que le nombre inconnu est le nombre zéro. (tdp 243, P : « mais/on a 9 d'un côté et 9 de l'autre/est-ce qu'on prend le 2 ? ».

La photographie suivante montre Richard qui valide le nombre 0 comme « Nombre inconnu ».



Photographie n°4, validation par Richard, élève du groupe d'anticipation

Date, le 25 avril 2014

La photographie centre le regard sur l'identification du nombre inconnu. Les propositions sont barrées (en bas du tableau) à l'exception du nombre « zéro » mais cela est insuffisant. Le nombre inconnu doit être maintenant introduit « à la bonne place » dans l'écriture additive de l'équipe B. Il est nécessaire de compléter l'écriture afin de montrer *avec certitude* l'égalité. Le nombre représenté est le nombre 9 et l'écriture 4 + 2 + 3 *est égale* à 1 + 8 **+ 0**. Ce n'est pas le professeur qui prend en charge cette synthèse mais un élève, Richard, du groupe d'anticipation.

L'enquête dans le milieu-recherche pourvu de la balance se poursuit avec deux nouvelles équipes. L'enjeu est toujours le même, il s'agit de la recherche de l'égalité avec la proposition d'un nombre inconnu que valide la balance. Comme précédemment, les essais effectués sur l'instrument montrent les mouvements de bascule. Nous pourrions appeler ce jeu « le jeu du trop ou du pas assez ».

6. BREFS ÉLÉMENTS DE DISCUSSION

La séance d'anticipation semble avoir permis aux élèves du groupe d'anticipation d'être particulièrement attentifs aux signes du milieu-recherche. Non seulement, les élèves paraissent en capacités de jouer au jeu demandé mais également d'orienter le reste de la classe dans l'enquête. Nous reviendrons donc dans la synthèse sur les échanges dans la classe, par exemple, sur le travail du contrat, sur le rôle du 0, sur les liens entre physique et mathématique concrétisés symbolisés par l'artéfact, l'instrument qu'est la balance et sur la participation des anticipants, d'une part, et des non anticipants, d'autre part, à la discussion collective.

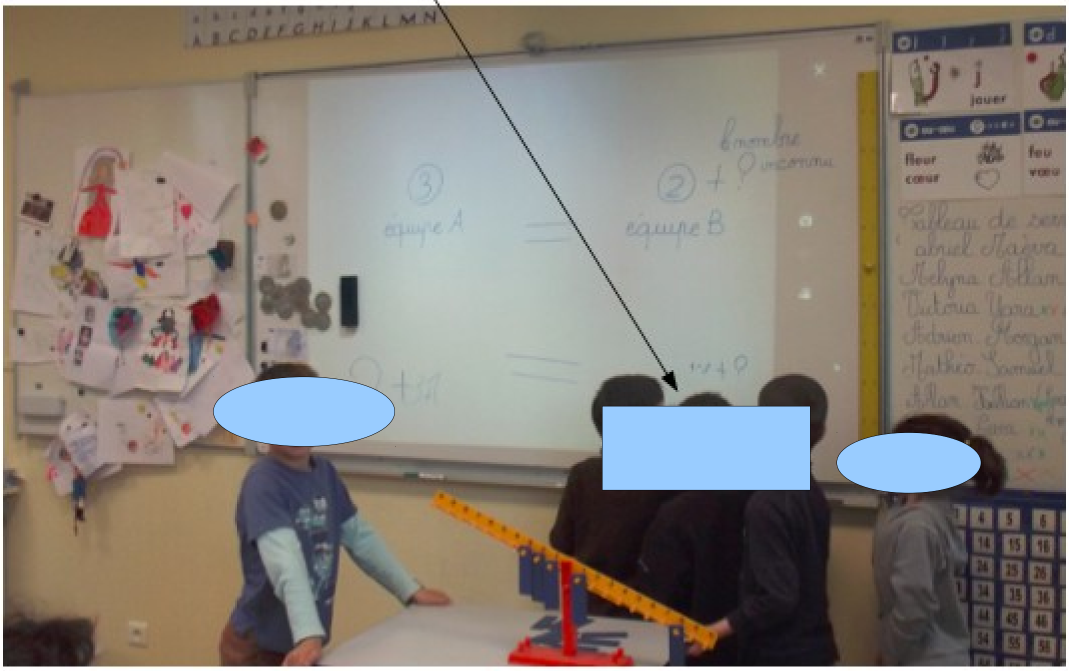
7. LA DIFFUSION DES CONNAISSANCES MONTRÉES À PARTIR D'UN EMBLÈME, LE TABLEAU DE LA CLASSE : l'écriture à deux termes supérieure à l'écriture à trois termes

Le paragraphe ci-dessous montre le rôle crucial du tableau qui est au centre des discussions entre les élèves. Dans la séance, les élèves vont élaborer le rôle de la preuve à travers trois systèmes sémiotiques (la balance, les doigts et les cubes).

7.1 Le jeu de la balance, quelques illustrations

L'enquête dans le milieu-recherche pourvu de la balance se poursuit avec deux nouvelles équipes. L'enjeu est toujours le même, il s'agit de la recherche de l'égalité avec la proposition d'un nombre inconnu que valide la balance. Comme précédemment, les essais effectués sur l'instrument montrent les mouvements de bascule. Nous pourrions appeler ce jeu « le jeu du trop ou du pas assez ».

Les propositions de la classe sont notées par les équipes



Photographie n°x, la diffusion se propage avec deux nouvelles équipes

Date, le 25 avril 2014

Le tableau montre une équipe A constituée de trois élèves (André, Joseph et Adrien) et une équipe B comprenant simplement deux élèves (Marie et Damien). Le professeur a augmenté le nombre de joueurs dans l'équipe A qui comprend trois termes donc trois lancés de dé. Les nombres de l'équipe A sont : 2 + 3 + 1 et pour l'équipe B, 1 + 8.

Les deux équipes discutent pour faire une proposition pendant que le reste des élèves de la classe travaillent individuellement sur leur ardoise à la recherche du nombre-inconnu.

La photographie semble intéressante parce qu'elle montre l'entente entre les quatre élèves dans l'enquête, à la recherche du nombre de l'équilibre dans le milieu-instrument. Quant à Joseph à gauche de la photographie, il semble observer les nombres notés par les élèves de la classe sur leur ardoise.

Le milieu-recherche amène une nouvelle enquête parce que le nombre représenté par l'écriture additive de l'équipe B (deux termes + le nombre inconnu) va être supérieur au nombre représenté par l'écriture additive de l'équipe A pourtant en trois termes, c'est-à-dire que les deux termes sans le nombre inconnu sont plus grands que le nombre de l'équipe A ($2 + 3 + 1 < 1 + 8 + ?$).

Pour résoudre le problème, les élèves vont donc prendre appui sur la balance et sur leurs connaissances anciennes. Il s'agit d'établir avec certitude la preuve du nombre inconnu pour compléter l'écriture 1 + 8 + ?

Étudions pour cela la transcription de la séance.

7.1.1 Le nouveau milieu-instrument

Le professeur s'exprime sur le milieu-instrument. Il fait constater qu'il existe toujours un déséquilibre mais cette fois-ci, il se trouve de l'autre côté.

*Tdp 316 (17mn24), P : « alors/**Damien rit**/ha !/poussez-vous/il faut d'abord écrire 1 + 8/1 + 8/heu/pourquoi le 8 n'est pas sur le tableau/bon alors cette fois-ci la balance/elle penche d'un autre côté dites donc »*

Nous sélectionnons les tours de parole 317 à 326.

Tdp 317, E (Isabelle) : « je sais pourquoi »

Tdp 318, P : « pourquoi »

Tdp 319, E(Isabelle) : « parce que en fait/ »

Tdp 320, E (Anne) : « c'est plus grand »

Tdp 321, E(Isabelle) : « ce côté là/le côté de l'équipe A/et ben il a fait 6 »

Tdp 322, E(Anne) : « 9 »

Tdp 323, E(Isabelle) : « et l'autre 9 »

Tdp 324, E(Christophe) : « en gros/je sais ce qui faut faire/ »

Tdp 325, E(Isabelle) : « le 9 »

Tdp 326, P : « bon vous cherchez le nombre inconnu pour équilibrer/ »

Que semble-t-il se jouer dans cet échange ? Le professeur a attiré l'attention sur le déséquilibre dans le milieu-instrument qui se situe de l'autre côté de la balance (Tdp 316). Une élève, Isabelle, s'exprime pour dire : *« je sais pourquoi » (tdp 317).* Le professeur demande alors simplement : *« pourquoi »* (tdp 318) mais avant que Isabelle puisse répondre, une autre élève Anne se fait entendre : « *c'est plus grand »* (tdp 320). La réponse d'Anne renseigne directement sur la cause du changement et le pourquoi du côté du déséquilibre. Pourtant Isabelle complète et poursuit : *« ce côté là/le côté de l'équipe A/et ben il a fait 6 »* (tdp 321) et *« et l'autre 9 »*(tdp 323). Elle compare le nombre 6 et le nombre 9, reprise par Anne (Tdp 322 : « 9 ») et donne à voir la relation « est plus petit que... » et/ou « est plus grand que ... ». Cela provoque sans doute l'intervention de Christophe : « *en gros/je sais ce qui faut faire/ »* (tdp 324). Le professeur ne confirme ni n'invalide, il demande : « *bon vous cherchez le nombre inconnu pour équilibrer/ »* (tdp 326). Isabelle va à nouveau intervenir au tdp 332 : « mais on peut pas ». Le professeur lui demande de se taire (« on t'a demandé quelque chose Isabelle ? » tdp 333).

Étudions comment l'enquête se poursuit.

Le professeur s'exprime afin que la classe ou une partie des élèves n'arrête pas les recherches suite à la remarque de Isabelle. Il intervient donc : « *pour l'instant/on en sait rien/on veut une proposition/**André chuchote et dit à son équipe, l'équipe 1, «** choisit 9/9/9 **»*** (tdp 1).

Christophe, un élève avancé revient en scène : « *on n'a jamais dit qu'on n'avait pas le droit aux nombres négatifs/* » (tdp 2) et un autre élève Richard prétend que c'est facile : *« Madame V./c'est facile/ »* (tdp3). Quelles vont être les propositions notées individuellement sur les ardoises des élèves.

Les réponses sont plutôt nombreuses (?, 3A[10], 2, 7, -3, 9). La classe entre alors dans un débat centré sur les propositions des élèves quant au nombre inconnu, pour la résolution de l'égalité : 2 + 3 + 1 = 1 + 8 + ? Regardons les différentes argumentations.

[10] Pour la réponse 3A, nous allons revenir plus bas à cette écriture.

Tdp 38, E(Isabelle) : « je prendrais pas 3 point d'interrogation »

Tdp 39, E(Nathalie) : « je suis d'accord/parce qu'en fait/point d'interrogation ça fait rien/et du coup/ça resterait comme ça/pas équilibré/ »

Deux élèves, Isabelle et Nathalie, semblent être d'accord pour rejeter le point d'interrogation (tdp 38 et 39 ci-dessus). Jean-Louis va pourtant intervenir pour apporter une précision sur le sens du point d'interrogation.

Tdp 41, E(Jean-Louis) : « oui/mais ça veut dire qu'on sait pas/ »

Continuons notre enquête sur l'élaboration de l'argumentation à la recherche du nombre inconnu. Ensuite, c'est le nombre 9 qui est soumis aux questionnements dont l'enjeu est de représenter le nombre inconnu.

*Tdp 47, E(Isabelle) : « **elle s'est déplacée et se trouve près de la balance**/si on avait mis un 9/ça faisait beaucoup trop/enfin 8 ça faisait trop plus un 1/enfin 6 c'est pas pareil que 2/**Isabelle explique que le nombre 8 de l'équipe B a 1 de plus que le nombre 9 (proposition d'un élève pour équilibrer). Elle ne prend pas puisque c'est trop parce que l'écart entre les nombres des équipes A (6) et B(8), c'est 2 d'où l'expression « enfin 6 c'est pas pareil que 2 ».***

*Tdp 54, E(Anne) : « parce que c'est trop »**Anne confirme aussi que la proposition 9 est trop importante pour compenser le déséquilibre d' un écart qui correspond au nombre 2.***

Tdp 55, E(Jean-Louis) : « parce que c'est beaucoup trop »

Jean-Louis affirme également son désaccord avec la proposition du nombre 9 pour équilibrer, avec l'expression « beaucoup trop ».

Le nombre 9 semble invalidé parce que « trop » mais il est nécessaire de construire cette certitude. Le professeur revient à nouveau sur le milieu-instrument et le côté qui penche : « alors/la balance est penche déjà de quel côté ?/ » (tdp 58).

Le professeur s'interroge, la stratégie de l'estimation pourrait-elle aider les élèves ? Nous sélectionnons les tdp de 59 à 64.

*Tdp 59, E (Isabelle) : « de celui-là/et si on remet un nombre de celui-là »**/Isabelle explique que le côté qui penche est le côté du nombre le plus « lourd ». Alors si on remet un nombre au nombre le plus grand, dès lors le déséquilibre va être maintenu. Les propos de Joseph confirment l'argument de Isabelle.***

*Tdp 60, E (Jean-Louis) : « si on met 9/si on met 9/ben ça sera pas toujours équilibré/ »**/Joseph explique alors que le nombre 9 peut être accroché mais le déséquilibre sera toujours le même. En fait, l'ajout du nombre 9 ne modifie pas le déséquilibre.***

*Tdp 61, P : « et bien non et si ? »/**Le professeur est partagé. Le côté de la balance qui penche est le même mais le déséquilibre avec l'ajout du nombre 9 subit dès lors une modification.***

*Tdp 62, E (Joseph) : « parce que là par contre si on mettait 9/ça serait pas équilibré non plus parce que là c'est 8 et là c'est le 9 donc que »**/Joseph est entrain de modifier les nombres présents sur la balance et il compare 9 avec 8.***

*Tdp 63, P : « alors/essaie de mettre le 9 du côté de la balance où c'est//non/non/on a deux nombres/le nombre inconnu c'est pour l'équipe B/c'est là où on a 2/ça change quelque chose ? »**/voilà pourquoi le professeur lui demande de placer le nombre 9 du côté de l'équipe B (2 termes + le nombre inconnu). La balance établit la preuve.***

Tdp 64, Es : « non ».

Un peu plus tard, Adrien, membre de l'équipe A, semble perplexe devant la proposition d'une élève. Le professeur choisit alors d'intervenir : « alors/question d'Adrien/vas-y pourquoi/ » (tdp 74). Adrien répond au tdp 75 : « pourquoi Isabelle a mis 3/A point d'interrogation/parce que c'est dans notre équipe/ ». Ici, la question d'Adrien semble essentiellement porter sur le nombre proposé par Isabelle pour l'équipe A alors que le nombre inconnu concerne l'équipe B. La question pourrait porter aussi sur pourquoi « 3A » (un nombre et une lettre) plus le point d'interrogation. Isabelle répond à Adrien. Étudions sa réponse ; qui concerne donc toujours la résolution de l'égalité 2 + 3 + 1 (équipe A) = 1 + 8 +? (équipe B) :

Tdp 81, E (Isabelle) : « ben en fait/c'est parce que moi/j'ai/je trouvais pas dans l'équipe B ce qu'il fallait/alors du *coup/moi/alors j'ai mis dans l'équipe A qu'il fallait heu heu heu mettre 3/pour que ça fasse équilibré/je crois qu'il faudrait mettre un autre par dessus ».*

Que dit-elle ? Elle explique que la réponse proposée pour l'équipe A (3A) c'est parce qu'elle ne trouvait pas. L'élève a répondu au contrat, c'est-à-dire « équilibrer » la balance avec la modification de la contrainte. Elle a placé le nombre inconnu dans l'écriture additive du nombre « le plus petit » pour compenser le déséquilibre.

Que fait alors le professeur ? Il dit simplement, au tdp qui suit (tdp 82) : « alors/alors/un 3 dans le A/on va essayer ». Il pourrait choisir de rejeter la proposition puisque le nombre inconnu n'appartient pas à l'équipe A. La proposition de l'élève a un intérêt certain, celui de poursuivre l'étude du milieu-instrument. Christophe semble aussi accepter cette proposition finalement : « en fait/y avait deux possibilités » (tdp 83). La proposition est testée et la classe pourrait bien adhérer comme Nathalie au tdp 86 (« ***elle voit la balance s'équilibrer***/je prends le 3 là »).

Pour le professeur, il est temps de redéfinir le problème (au tdp 91, P : « ***alors/le 3 il va/ c'est vrai que la balance est équilibrée/sauf que est-ce que//*** ». Isabelle explique une nouvelle fois au tdp 95 : « non/non mais sauf que je trouvais pas/sinon j'aurai peut-être mis un 3 à celui-là et c'aurait pu faire// ». C'est Christophe qui a des choses à dire comme nous le montre le tdp 96 : « y a un 3/moi je peux vous expliquer ce que ça va faire » .

7.1.2 Les nombres négatifs

Christophe se charge de fournir un explication à la classe. La réponse 3 convient mais c'est « -3 ». L'élève va utiliser pour cela une référence commune à la classe, le jeu des annonces « Dé et doigts ».

Tdp 104, E(Christophe) : « en fait/moins trois/heu/dans une annonce c'est plus moins trois/c'est comme si/il n'y avait pas de plus et/et c'était moins trois/ »

Une élève au moins a compris l'explication donnée par Christophe. Isabelle reformule à sa façon ce qu'elle pense avoir compris.

*Tdp 105, E (Isabelle) : « j'ai compris/en fait/c'est/c'est que/que/on enlève moins 3 au 8/ »*La proposition de Christophe reprise par Isabelle pourrait donc s'écrire 2 + 3 + 1 = 1 + 8 **- 3**

Le professeur s'exprime pour user d'une autre référence commune à la classe « voir un nombre dans un nombre » au tdp 110 : « c'est parce que/on va/on va/remets sur le 8/remets le 8/il a raison/alors/re/regardez/remets sur le 8/et le 8 on va l'échanger/on va l'échanger contre/8/on peut le voir comment ?/ ».

Il y aura plusieurs propositions comme 4 + 4, 1 + 7 et enfin 5 + 3. Puis le professeur fait échanger le nombre (8) contre les nombres (5) et (3) au tdp 116. (« **ha/*le professeur frappe dans les mains***/on va le voir comme 5 + 3/alors on enlève le 8/et on l'échange contre un 5 + 3/+3//alors 5 + 3/ »).

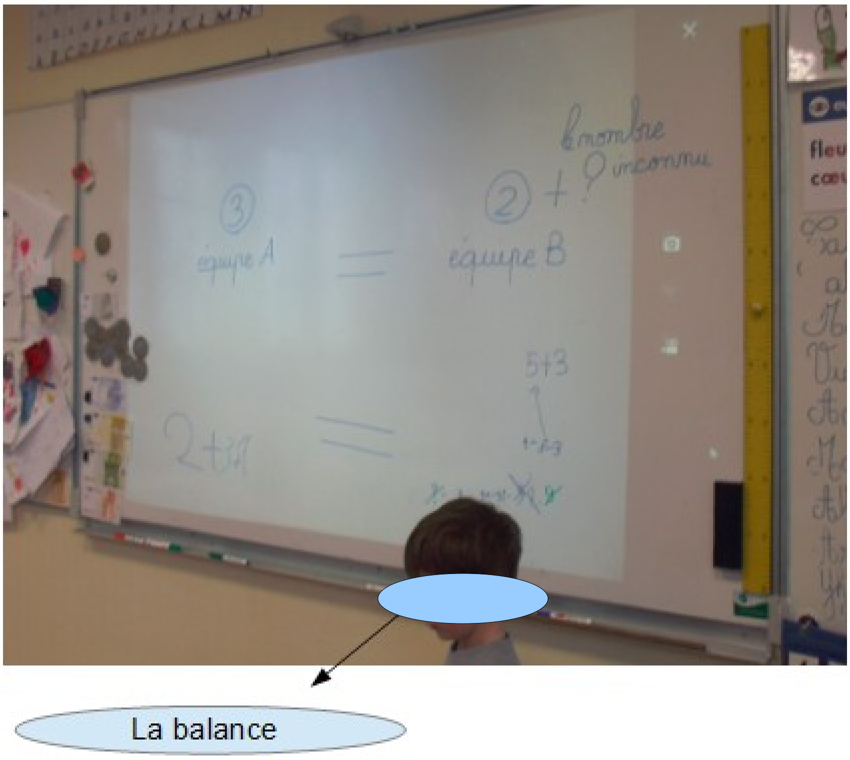
Ensuite, le professeur fait constater que le déséquilibre est bien toujours identique, c'est le même. (tdp 120, P : « c'est normal que ça penche ? » Les élèves confirment au tdp 126 : « oui ». Puis Christophe conclut : « c'est comme 8 moins 3 en fait » au tdp 152.

Photographie n°x, Christophe vérifie la « preuve » de l'équilibre sur la balance

Date, le 25 avril 2014

La question de l'équilibre se cherche et se vérifie par la balance. Il n'y a pas de négociation possible. La proposition pour le nombre inconnu est validée ou rejetée. Des élèves commencent à argumenter avec des connaissances anciennes mémorisées. Ici, la photographie représente Christophe faisant l'échange du nombre 8 contre les nombres 5 et 3. Il s'assure, lui comme la classe que le déséquilibre est bien *le même* qu'avant l'échange puis il « tire » le 3 et équilibre de la balance. C'est Christophe lui-même qui se propose de faire une démonstration, ce que le professeur accepte.

La balance valide le « nombre inconnu » proposé, c'est la preuve



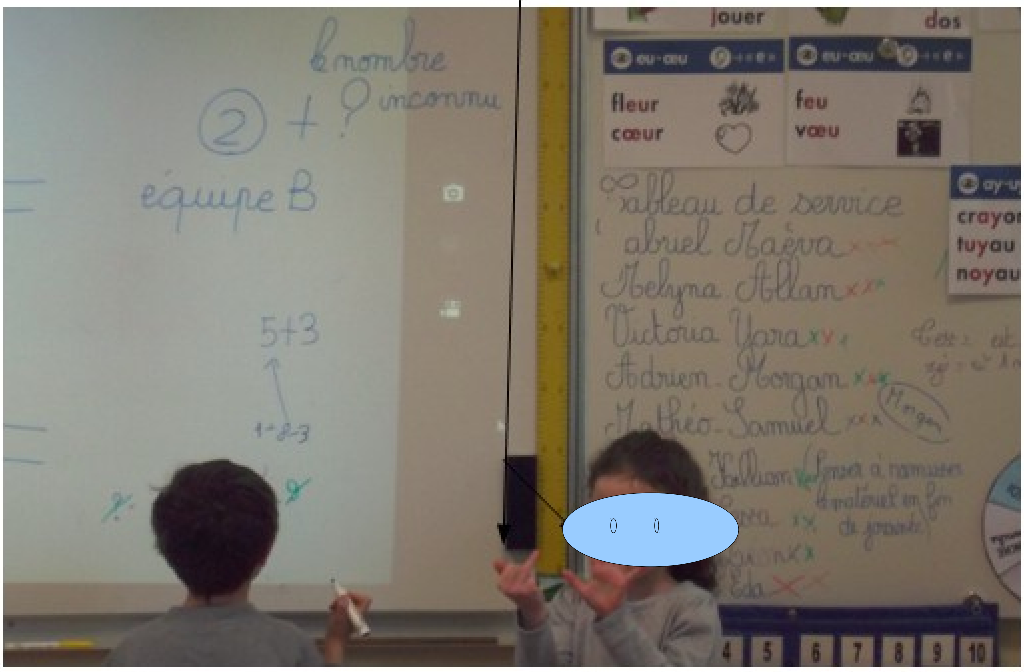
Photographie n°5 : Christophe explore le milieu-artéfact

Date, le 25 avril 2014

7.1.3 D'autres systèmes de preuve : les doigts, la décomposition, les cubes

D'autres systèmes de preuve : les doigts

Les doigts démontrent



Photographie n°6 : les doigts « disent » la même chose

Date, le 25 avril 2014

Isabelle explique à la classe qu'il s'agit bien du même nombre avec l'usage des doigts. Pour cela, nous sélectionnons les tdp de 220 à 223.

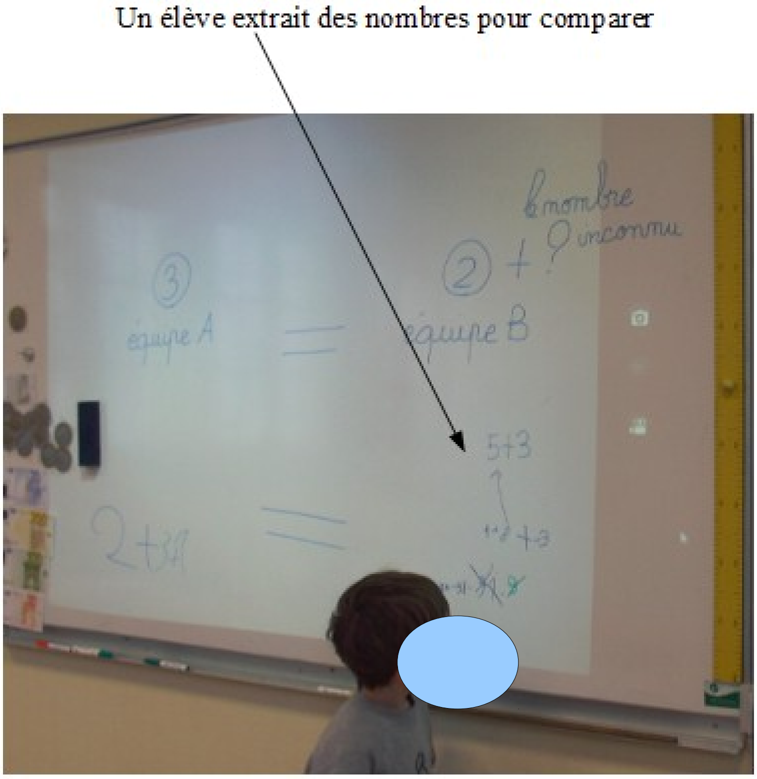
Tdp 220, E (Isabelle) : « + 1/ça/ça fait 9 »

Tdp 221, P : « oui ».

*Tdp 222, E (Isabelle) : « et on met moins 3 et du coup il nous reste 6/**Isabelle fait la démonstration sur ses doigts** ».*

*Tdp 223, P : « laisse tes doigts en l'air/que tu montres/**le professeur prend une photographie**/allez le calcul Christophe/alors 8 + 1/1 + 8 ».*

Les doigts servent à montrer, dans le deuxième membre de l'égalité, la somme de 1 + 8 (c'est 9) et le reste 6 avec le « moins 3 ». Sur la photographie ci-dessus, Isabelle vient d'abaisser 3 doigts, « il nous reste 6 » (ci-dessus, tdp 222)



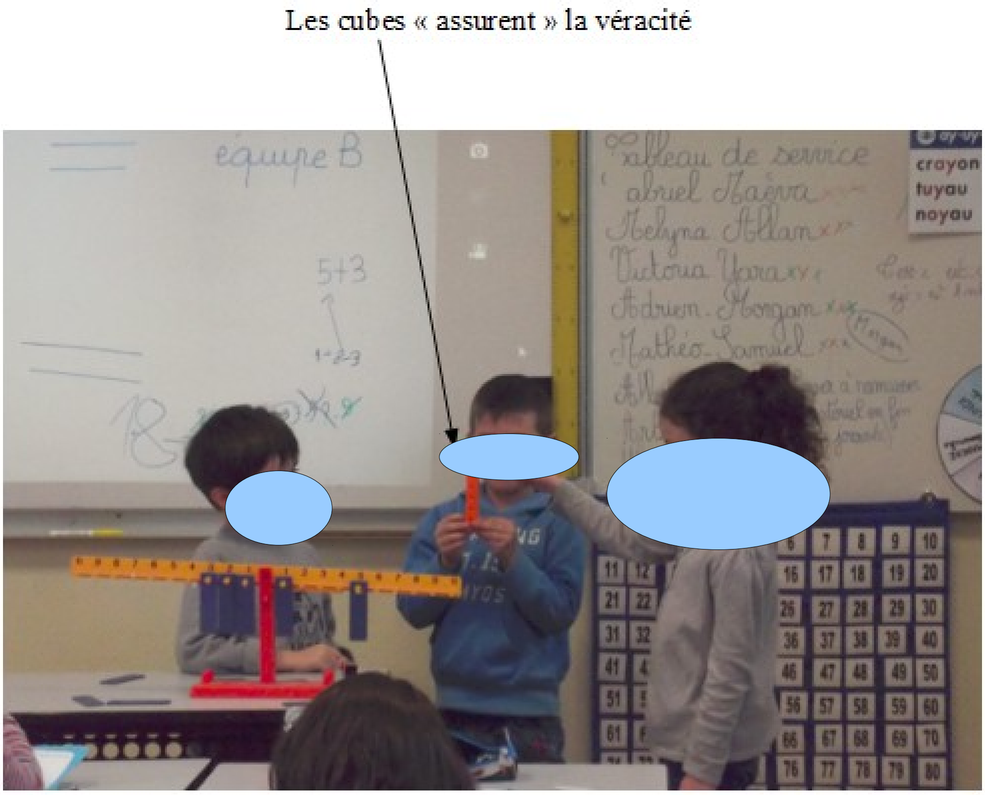
Photographie n°7 : Christophe transfère et combine pour rechercher le nombre inconnu

Date, le 25 avril 2014

Christophe extrait et combine pour la proposition du nombre inconnu à partir du nombre 8 dont il extrait le 5 et le 3. Le 5 se voit dans l'écriture de l'équipe A avec 2 + 3, les nombres sont combinés.

*Tdp 206, E (Isabelle) : « ça je sais que ça fait 6 (3 + 2 + 1)/**Isabelle a calculé la somme de l'équipe A***
*Tdp 207, P : « oui »/**le professeur confirme**.*
*Tdp 208, E (Isabelle) : « ça/ça fait 5 et ça/5 + 1 c'est 6 »/**elle explique le dernier groupement à partir du repère du 5.***
*Tdp 209, P : « oui/très bien/Christophe groupe les nombres au tableau »/**Christophe a réalisé les groupements pendant que Isabelle formulait les décompositions.***
*Tdp 210, E (Isabelle) : et puis après/heu/heu/on enlève/4/»/ici, **elle réalise une soustraction pour calculer la différence entre 6 et 9. elle propose alors le nombre-écart 4.***

Christophe a groupé les nombres 3 et 2 pour former le nombre 6. Il calcule ensuite 5 + 1 = 6 pour l'équipe A, dans le premier membre de l'égalité. La proposition pour l'équipe B était : 1 + 8 **+ - 3,** et puis Christophe a effacé pour réécrire 1 + 8 – 3. Cela revient, après avoir « extrait un nombre », à 1 + **5 + 3** – 3 ou, après le groupement, au calcul 9 – 3.



Photographie n°8 : Mathieu prouve le même nombre avec l'usage des cubes

Date, le 25 avril 2014

Mathieu prend les cubes et avec l'aide de Isabelle, ils montrent le calcul du même nombre inconnu (6).

*Tdp 230, P : « dépêche-toi/Mathieu prends un train de 9/dépêche-toi/un train de 9/montre-nous vite/Alors ça c'est un train de 10/prends-le/pour que se soit un train de 9/qu'est-ce que tu fais ? »/**Mathieu prend un train de dix dans l'espace réservé au dénombrement de grandes collections***

*Tdp 231, E : « on enlève un »./**un élève précise que la train est à modifier***

*Tdp 232, P : « on enlève un/allez vite/tu le montres aux copains/allez vas-y/on avait 9/donc »/**c'est la fin de la séance et le professeur accélère un peu le temps***

*Tdp 233, E (Isabelle) : « 1 + 8 ça fait 9 »/**L'élève fait le lien pour expliciter comment le nombre 9 a été calculé/en fait/ pourquoi la classe a besoin du nombre 9/***

*Tdp 234, P : »donc on enlève 3 »/**le professeur rappelle le nombre de doigts baissés***

*Tdp 235, E (Isabelle) : « parce que moins 3 »/**ici, l'élève fait référence à l'écriture sur le tableau (1 + 8 - 3)***

*Tdp 236, P : « parce que moins 3/reste-t-il bien 6 »/**le professeur fait constater que le reste (le nombre inconnu est le même)***

*Tdp 237, E (Marie) : « oui »/**Marie donne rapidement sa validation***

Les cubes confirment donc le nombre 6 comme nombre inconnu pour l'écriture de l'équipe B. Les élèves n'ont pas tenté d'utiliser la ligne graduée, autre référence commune à la classe. Le professeur laisse et pense user spécifiquement de cet outil sémiotique (la ligne graduée) pour traiter à nouveau la question dès trois nombres de l'équipe A inférieurs aux deux nombres plus la recherche du nombre inconnu de l'équipe B (3 nombres < 2 nombres + nombre inconnu).

8. BREFS ÉLÉMENTS DE DISCUSSION

La balance est un milieu que l'on peut caractériser d'une certaine façon de milieu « antagoniste » parce qu'elle réagit en validant les stratégies mathématiquement correctes et en invalidant le stratégies mathématiquement incorrectes.

Les élèves ont résolu le problème du nombre inconnu avec l'utilisation du signe « - ». Maintenant, nous allons étudier la construction de la notion « Différence/Soustraction » à partir d'une séance d'anticipation.

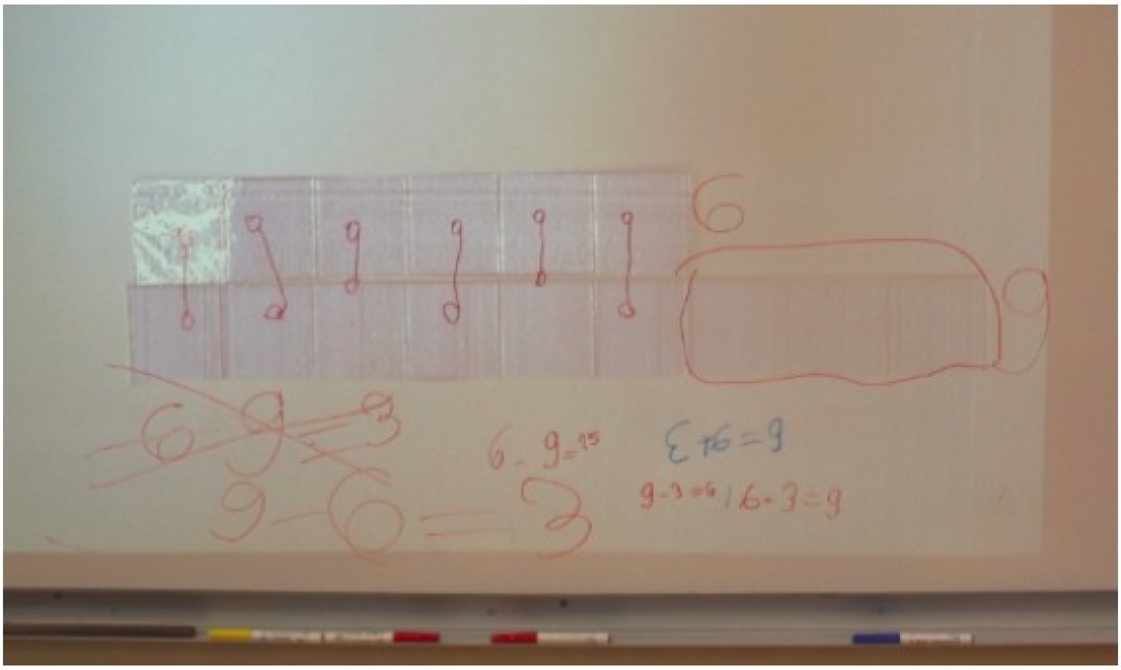
9. LE TRAITEMENT DE LA « DIFFÉRENCE/SOUSTRACTION »

Les séances sélectionnées se situent à la période de janvier et début février. Les élèves ont construit la notion de différence par la comparaison de deux nombres à partir de deux annonces de doigts pour lesquelles ils recherchent « combien de doigts *de plus* » possède l'annonce la plus grande et/ou « combien de doigts *de moins* » possède l'annonce la plus petite. La comparaison matérialise la différence pour laquelle les élèves mettent en œuvre une sorte de correspondance terme à terme pour saisir « ce qui est pareil » avant d'identifier « ce qui est différent ». Cela montre la « Différence/Soustraction », à la fois comme un nombre-complément et un nombre-écart.

Le même train-nombre peut aussi représenter et coder le même écart de plusieurs opérations différentes comme 5 – 2, 6 – 3, 4 – 1, 2 **+ 3** = 5, 3 **+ 3** = 6... Les élèves parlent la « Différence/Soustraction » en appui sur le matériel spécifique.

Le travail s'est poursuivi avec le matériel spécifique des trains-nombres. Il permet de calculer la différence entre un train de 6 et un train de 9 par la recherche du train-nombre correspondant à la différence-écart. Ici, il s'agit d'un train-nombre de 3. Ce train-nombre (écart) de 3 accolé au train-nombre de 6 forment un train-nombre de 9 (6 + 3) égal au train-nombre de 9 (9 = 9). Les deux trains-nombres sont alors égaux. Cela a son importance puisque l'élève va peu à peu construire quatre opérations issues des deux trains-nombres dont l'enjeu est la compréhension de la soustraction par la consolidation des relations de l'addition et la soustraction. Dans notre exemple et à partir des nombres 6 et 9, l'élève va produire les quatre opérations suivantes : 6 + 3 = 9, 3 + 6 = 9, 9 – 3 = 6 et 9 – 6 = 3. La différence entre 6 et 9 est de 3 parce que 3 + 6 = 9 ou bien 9 – 6 = 3.

Nous insérons une photographie du tableau de la classe qui montre les stratégies de comparaison pour quantifier la différence.



Photographie n°9 : les trains-nombres et la différence

Date, le 28 janvier 2014

Sur la photographie, les élèves ont relié « ce qui est pareil » dans les deux trains-nombres 6 et 9 puis ils ont entouré « ce qui est différent ». Ensuite, ils ont recherché comment coder la différence entre les nombres 6 et 9, individuellement sur l'ardoise. En bas du tableau, nous voyons les différentes opérations produites par les élèves. Les propositions sont les suivantes 6 – 9 = 3 (l'élève a barré sa proposition après discussion), 9 – 6 = 3, 6 – 9 = 15, 3 + 6 = 9, 9 – 3 = 6 et 6 + 3 = 9.

La première opération est barrée (6 – 9 = 3) puisque cela n'est pas possible de voir 9 dans 6. Une seconde opération nous apprend que l'élève a écrit le signe « - » (élément sémiotique de la soustraction) mais il réalise pourtant une addition (6 – 9 = 15). Les autres opérations montrent les quatre opérations issues de la relation des trois nombres 6, 9 et 3.

Le professeur décide de la mise en œuvre de séances d'anticipation pour l'élaboration de la relation spécifique « addition-soustraction » à partir du *jeu du rallye*.

9.0 La règle du jeu du rallye

Le jeu du rallye est un jeu de cartes sur lesquelles sont représentées des nombres de 1 à 9. Chaque joueur reçoit un même nombre de cartes dont il doit chercher à se débarrasser. Pour cela, il cherche à combiner les nombres sur ses cartes afin de produire le même nombre (qui représente des kilomètres, dans le jeu) réalisé par un lancer de deux dés. La contrainte oblige le joueur à représenter le nombre de kilomètres avec deux ou trois cartes (impossibilité de représenter le nombre avec une carte). Par exemple, le joueur ne peut déposer sur la table une carte avec le nombre 4 pour représenter les kilomètres (du lancer de dés). Il doit composer le nombre 4 sous la forme d'une décomposition additive de deux ou trois cartes. Pour cela, le joueur peut utiliser aussi bien le signe « moins » que le signe »plus ». Il est aussi exigé de dire la calcul à voix haute. En fin de partie, le gagnant est celui qui n'a plus de cartes.

Toutes les cartes ne sont pas distribuées. La pioche est constituée par le reste de cartes. Un joueur essaie de composer le nombre de kilomètres avec les nombres (les cartes) dont il dispose. En cas d'impossibilité à représenter le nombre de kilomètres, il peut piocher une carte. S'il ne peut représenter le nombre de kilomètres, il passe alors son tour. Le joueur suivant ne lance pas les dés et il cherche à représenter le même nombre de kilomètres. Lorsque tous les joueurs ont tenté de composer le nombre de kilomètres du premier lancer de dé, c'est au second joueur de lancer les dés pour définir le nombre de kilomètres à « parcourir ». Si un joueur termine la partie sans carte, il est le gagnant et reçoit une petite voiture en carton. Les cartes sont à nouveau mélangées et redistribuées pour une nouvelle partie démarre.

Nous avons sélectionné la séance du 28 janvier 2014. Elle se compose comme la séance analysée précédemment d'une séance d'anticipation suivie d'une séance en collectif dans laquelle les élèves du groupe d'anticipation fonctionnent comme une cellule de diffusion où les règles définitoires sont un « condensé » d'expériences vécues.

9.1 La séance d'anticipation et la réciprocité de la relation addition et soustraction

Le dispositif d'anticipation évolue de la cellule germinative (apprendre à travailler ensemble dans le petit groupe et à partager les connaissances) vers la cellule de diffusion des règles définitoires à l'ensemble de la classe. La séance du 28 janvier 2014, que nous allons étudier ci-dessous, a ceci d particulier qu'elle est la toute première séance dans laquelle le statut des anticipants se définit comme des *passeurs d'une expérience vécue* lors de la séance d'anticipation.

9.1.1 Les stratégies de comparaison

Le groupe d'anticipation et l'élaboration de la réciprocité addition-soustraction

Photographie n°10 : le jeu du rallye

Date, le 28 janvier 2014

Comme nous l'avons explicité les élèves disposent de cartes pour former le nombre réalisé par le lancer de deux dés (sur la photographie ci-dessus, on peut voir les deux dés sur le plateau, les quatre cartes distribuées à chaque élève et la pioche près du professeur). La situation nous semble intéressante puisqu'elle devrait permettre de questionner à nouveau le rapport addition et soustraction dans un autre milieu-recherche que ceux déjà rencontrés, milieu-recherche constitué par d'autres contraintes. Pour l'analyse des comportements produits par les élèves dans la situation du rallye (dans le groupe d'anticipation), nous utilisons les tdp de la transcription.

Les dés ont été lancé et les élèves doivent combiner les cartes afin de représenter le nombre 4 désigné par le lancer des dés (1 + 3 = 4). Timéo possède les nombres 2, 7, 9 et 8. Mathieu a reçu 9, 8, 3 et 6. Richard dispose des nombres 3, 6, 4 et 5. Quant à Isabelle, ses nombres sont les suivants : 3, 2, 5 et 4.

La difficulté rencontrée est la contrainte des nombres disponibles (présents sur les cartes) pour chaque joueur. Le début de la transcription montre des élèves qui tentent des propositions tout en sachant qu'elles ne fonctionnent pas - mais ils essaient toutefois (tdp 33).

Tdp 33, E (Isabelle) : « heu/2 -2 » ***rires de Isabelle qui sélectionne le plus petit des nombres à sa disposition (3, 2, 5, 4) pour faire 4 mais cela ne fonctionne pas/elle ne peut poser la carte 4 à cause de la contrainte de 2 ou 3 cartes***
Tdp 41, 4(Richard) : « oui/j'mets mon 3//et et je rajoute le moins »/ ***Richard semble utiliser la même stratégie puisque sur les quatre nombres qu'il possède (3,6,4 et 5), il choisit 4 et 3 mais il sait que c'est trop donc il prend un « moins »***
Tdp 42, P : « moins quoi ? »/ ***cela est possible de proposer 3 nombres mais le professeur lui demande quel est ce nombre***

*Tdp 43, E (Isabelle) : « 2 moins 1 »/**Isabelle essaie de combiner deux petits nombres puisque 4 n'est pas un nombre très important/comme si le nombre 4 ne pouvait être calculé à partir de grands nombres***

*Tdp 44, E (Richard) : « est égal à 1 »/**Richard répond peut-être à Isabelle ou bien il calcule le résultat de ses deux cartes 4 - 3***

Tdp 45, P : « oui mais on veut pas 1 »

D'autres encore comme Richard cherche à enfreindre la contrainte et propose des combinaisons avec des nombres qu'il ne possède pas. Les élèves ont élaboré un rapport à l'objet « différence/Soustraction » que le professeur cherche à consolider. Les tdp 41 et 44 montrent que Richard a des connaissances sur la soustraction. Par exemple, il sait que 3 est plus petit que 4. De plus, l'écart entre les deux nombres est de « moins 1 ». Ces relations entre les nombres voisinent autour du nombre 4 (les kilomètres à représenter) et la compréhension de la soustraction. Ce résultat partiel « moins 1 » est pourtant crucial puisqu'il permettrait à Richard de gagner avec la carte 5 dont il dispose (5 – 1 = 4). Le nombre 4 serait représenté par 4 – 3 = 1 et 5 – 1 = 4 ou encore 5 – 4 + 3 = 4 puisque l'écart de 1 peut-être tout autant réalisé à partir des nombres 5 et 4.

L'extrait suivant (Tdp 50 à 64) donne à voir les stratégies de comparaison issues du module « Différence/Soustraction ». C'est au tour de Mathieu de proposer une décomposition additive pour le nombre 4. Nous rappelons qu'il dispose des nombres 9, 8, 6 et 3. Il choisit de piocher une carte et tire le nombre 7.

Tdp 50, E (Mathieu) : « moi/je sais/ »

Tdp 51, P : « comment tu veux faire »

Tdp 52, E (Mathieu) : « 3 moins 7 »

*Tdp 53, E (Isabelle) : « oui mais j'ai pas de 7 »/**Isabelle confirme ainsi sans doute que le calcul est juste mais elle n'a pas de 7 pour le réaliser pourtant elle pourrait calculer 4 avec les cartes dont elle dispose 5, 3, 4 et 2 (5 + 3 – 4 = 4)***

Tdp 54, P : « ha/alors/c'est les bons nombres/mais 3 - 7/on peut pas prendre/on peut pas prendre/alors//comment tu dirais »

Tdp 55, E : « 7 moins 3 »

Tdp 56, E (Isabelle) : « 7 moins 3 »

*Tdp 57, P : « **le professeur montre 7 doigts et Isabelle montre 3 doigts pour la comparaison de la différence** 7//alors/montre 3 doigts/alors/on va les/qu'est-ce qui est pareil/ »*

*Tdp 58, E (Isabelle) : « heu ça↑ **Isabelle montre les trois doigts présents dans chaque annonce** »*

Tdp 59, P : « qu'est-ce qui est différent »

*Tdp 60, E (Isabelle) : « heu ça **Isabelle de son doigt entoure ce qui est différent, les quatre doigts de plus** »*

Tdp 61, P : « on n'a pas 4 ? »

Tdp 62, Es : « si »

Tdp 63, P : « ha/bravo ↑ »

Tdp 64, E (Mathieu) : « c'est moi qui l'ai trouvé »

Mathieu sélectionne les nombres (le 3 et le 7) à combiner pour obtenir un écart de 4 mais il inverse les nombres et dit : *« 3 moins 7 » au tdp 52*). Isabelle s'exprime pour préciser « j'ai pas de 7 » (tdp 53). En fait, Mathieu possède une carte avec le nombre 7 qu'il vient de piocher mais Isabelle n'en a pas. Elle pourrait toutefois représenter le nombre 4 avec trois cartes (trois nombres). Pour cela, elle additionnerait 5 + 3 = 8 et du nombre 8, elle soustrait 4 (8 – 4 = 4). Les élèves recherchent à composer le nombre 4 désigné par le lancer des dés (1 + 3 = 4) avec les cartes disponibles sur la table. Les doigts servent à valider. C'est pourquoi le professeur, au tdp 57, « sort » 7 doigts et demande à Isabelle d'en sortir 3. Les doigts sont rapprochés et ce qui est pareil est abaissé, il reste la différence. Isabelle désigne au tdp 58 d'abord *« les trois doigts présents sur chaque « annonce » »* puis au tdp 60, elle entoure *« ce qui est différent, les quatre doigts de plus »*. Les élèves semblent donc disposer de stratégies pour penser la relation de l'addition et la soustraction.

9.1.2 Faire avec les nombres dont on dispose

C'est au tour de Richard de faire une proposition pour un nouveau lancer de dés. Il s'agit de réaliser le nombre 6. Étudions les tdp de 114 à 127 entre Richard et le professeur.

Tdp 114, P : « qui a un calcul à nous proposer pour faire 6 »

Tdp 115, E : « moi ↑ »

*Tdp 116, P : « vas-y/**le professeur s'adresse à Richard** »*

*Tdp 117, E (Richard) : « si on met un moins ça fait 2 /**Richard a pris une carte de 3 et une carte de 4/il pose son doigt sur le 3 et dit si on met un moins ça fait 2**/et c'est/et du coup/ »*

*Tdp 118, P : « ha/**le professeur rit** »*

Tdp 119, E (Richard) : « du coup »

Tdp 120, P : « oui mais/où il est le/ha oui/ »

Tdp 121, E (Richard) : « ha oui »

Tdp 122, P : « hein/hein/ »

Tdp 123, E (Mathieu) : « j'en ai une »

Tdp 124, P : « ha/ben vas-y »

Tdp 125, E (Richard) : « et si on met un moins↑ça fait ↑si on met un moins ça fait 2/ »

Tdp 126, P : « oui/oui/je sais ce que tu veux faire/tu veux/tu veux transformer ta carte de 3 en 2/ »

Tdp 127, E (Richard) : « oui »

L'extrait montre en particulier que Richard là encore, montre des connaissances puisque l'addition qu'il propose au professeur 2 + 4 désigne bien le nombre 6 (tdp 117*« si on met un moins ça fait 2 /**Richard a pris une carte de 3 et une carte de 4/il pose son doigt sur le 3 et dit si on met un moins ça fait 2** /et c'est/et du coup/ »*) sauf qu'il ne possède pas de carte avec le nombre 1. Cela ne lui permet pas d'annoncer 4 + 3 – 1 ni même 4 + 2. C'est pourquoi il répète au tdp 126, *« et si on met un moins↑ça fait ↑si on met un moins ça fait 2/ ».*
L'intérêt nous semble résider dans la nécessité de l'adaptation au milieu-recherche. Il semble parfois que les connaissances mémorisées par l'élève « l'empêchent » d'explorer le milieu-recherche. L'élève semble alors penser par rapport aux répertoires mémorisés et accessibles (comme Richard) ce qui contraint les possibilités d'enquête. Celle-ci se trouve « limitée » puisque l'élève cherche à rendre la situation « conforme » aux connaissances dont il dispose afin de pouvoir jouer. D'autres élèves comme Isabelle explore le milieu-recherche par la formulation de propositions même erronées. La stratégie mise en œuvre ressemble alors à une redécouverte des répertoires mémorisés. Cela en teste à nouveau la solidité.

9.2 Les anticipants diffusent les règles définitoires dans la classe

La séance collective suit la séance d'anticipation. Elles ne sont pas séparées dans le temps. Les anticipants viennent de terminer la séance d'anticipation. Le professeur regarde rapidement le travail réalisé dans le Journal du Nombre par les autres élèves de la classe en autonomie. Il demande aux anticipants de se placer près du tableau pour expliciter les règles du jeu du rallye. Les élèves de la classe peuvent évidemment poser des questions complémentaires. Un temps d'atelier est prévu après la diffusion des règles définitoires. Nous donnons à voir la photographie d'une vue d'ensemble de cette diffusion.

Photographie n°11 : les anticipants devant le groupe-classe
Date, le 28 janvier 2014

Le professeur demande aux anticipants de venir s'exprimer devant les élèves de la classe au sujet de ce qui est important de connaître pour pouvoir jouer au jeu du rallye. Ce temps de jeu doit intervenir juste après la diffusion. Au début, trois élèves vont s'exprimer : Richard, Timéo et Isabelle. Il est important de noter que Timéo intervient peu - même dans le petit groupe d'anticipation - pourtant il montre sa capacité à résumer l'essentiel.
Richard est le premier élève à s'exprimer et il centre son intervention sur le gain (gagner des petites voitures) et même beaucoup de voitures avec plusieurs parties remportées (tdp 8). Les élèves n'ont pas les connaissances sur « comment gagner » ces petites voitures.

Tdp 8, E (Richard) : « dès que l'on a plus de/vraiment de cartes/on a une voiture/et après si on remporte les autres parties/heu/ **Richard fait de grands gestes avec les mains pour signifier la notion de beaucoup**/on a plein de voitures »
Tdp 9, P : « hum/hum/**Timéo lève le doigt et prend la parole** »
Tdp 10, E (Timéo) : « mais en fait aussi/on lance le dé dans le plateau/avec les chiffres/faut faire le même nombre/ »
Tdp 11 (11mn40), E (Isabelle) : « avec les cartes plutôt/Timéo/ »

Timéo, par son intervention, précise le lancer de dé, les nombres (les chiffres) et faire le même nombre (tdp 10). Nous pouvons sans doute dire que si Timéo ne s'est pas beaucoup exprimé lors de la séance d'anticipation, l'expérience vécue lui sert à identifier des éléments importants à connaître pour jouer au jeu du rallye. Il manque toutefois, à ce début de définition, les cartes pour constituer le nombre réalisé par le lancer. L'information est apportée par Isabelle au tdp 11. Elle intervient à nouveau pour compléter :

*Tdp 13, (2mn10), E (Isabelle) : « heu aussi/y/il faut que/que/que quelqu'un lance les deux dés/et pis/on/on/on peut dire que/c'est un moins ou un plus/**des doigts parmi les élèves de la classe se lèvent (Joseph, Lara, Hélène)**/pas que dire/mais pas que dire/5+heu/1/on peut aussi dire 5 moins 1/ »*

Isabelle vient de mettre en évidence les signes mathématiques à utiliser lors les calculs en fournissant un exemple aux élèves de la classe (tdp 13 « *pas que dire/mais pas que dire/5+heu/1/on peut aussi dire 5 moins 1/ »).* Richard demande alors au professeur la parole pour préciser certaines propriétés associées à type de nombres.

Tdp 15 (2mn21), E (Richard) : « vu que 2 et 1/le 1/il peut faire le moins/ le 2/il peut rapetir le nombre aussi/donc/si on a/si on a/heu/heu/2 et/ 1/deux 1/et/et deux 2/on peut rapetir 9/comme si on a/si on a 6/on peut rapetir/ »

Richard est entrain d'expliciter non plus une *règle définitoire* mais une transformation réalisée à partir des nombres 1 et 2. Il décrit un état initial, par exemple le nombre 9 auquel le nombre 1 fait subir une transformation. Il fait « diminuer » le nombre de départ mais Richard ne précise pas l'état final après la transformation.

Le professeur s'exprime pour signaler aux élèves de la classe qu'ils peuvent maintenant poser des questions complémentaires à la compréhension de la règle du jeu du rallye.

Tdp 19, P : « voilà/alors/maintenant/vous allez répondre aux questions de vos élèves »

9.2.1 Un épisode spécifique autour du gain des voitures

Un échange nous semble intéressant autour du gain des petites voitures. Il est initié par Joseph qui dit n'avoir pas bien compris au tdp 21. Isabelle explique qu'il faut « se débarrasser de ses cartes » au tdp 25. Un élève André, non anticipant intervient sur le pourquoi de cette règle au tdp 36. En fait, ce qui perturbe André est la notion de gain (on gagne des petites voitures) lorsque le joueur a perdu toutes ses cartes (lorsque le joueur s'est débarrassé de ses cartes). Étudions cet extrait.

Tdp 21, E (Joseph) : « j'ai pas compris/quand on a plus de carte/on a une voiture/j'ai pas très bien compris/heu/ »
*Tdp 22, E (André) : « ha moi/je sais/**il lève la main »***
Tdp 23, E (Isabelle) : « c'est qu'est-ce que/en fait/heu/heu/ »
*Tdp 24, P : « Lara/ **le professeur appelle en chuchotant une élève qui n'écoutait plus et commençait à s'agiter** »*
Tdp 25, E (Isabelle) : « on doit se débarrasser de ses cartes »
*Tdp 26, E (Richard) : « oui/**Richard fait de grands gestes avec les mains**/après »*
*Tdp 27, E (Isabelle) : « et pis/on lance le dé/deux dés/quelqu'un lance deux dés/et pis/heu/il faut/heu/si on a le même nombre/avec ses cartes/avec deux cartes/on doit faire avec deux cartes/et ben/heu/elles sont plus/plus à nous/donc/heu/c'est bien quoi/on s'en est débarrasser/il faut continuer comme ça et quand on a plus de cartes/on/on a gagné »/**Ici, Isabelle explique la « perte » une fois le nombre de kilomètres représenté avec deux ou trois cartes/***
Tdp 28, E (Richard) : « on a une voiture »
Tdp 29, Es (les anticipants) : « on gagne une voiture »
Tdp 30, E (Joseph) : « on gagne plein de voitures »
Tdp 31, Es (les anticipants) : « une voiture »
Tdp 32, E (Richard) : « une voiture/si on gagne tous les parties/et si on a dix voitures/c'est le gagnant/ »
Tdp 33, E (Isabelle) : « ça/c'était pas dans le jeu par contre/Richard »
*Tdp 34, P : « alors/y a encore des élèves qui posent des questions/l**e professeur voit encore des mains se lever**/ »*
Tdp 35, E (Mathieu) : « André »
Tdp 36, E (André) : « et ben/et ben/pourquoi/on doit/mettre/on doit mettre/alors/que/alors que/ce serait mieux qu'on/qu'on/quand on a plus de cartes/si on les gagne/et par contre/quand on a plus de cartes/ça devrait être quand/quand on gagne une voiture/mais si on a moins de cartes/on devrait pas avoir de voiture/ »
Tdp 37, E (Timéo) : « non »
Tdp 38 (4mn08), E (Richard) : « si c'est ça le jeu »
Tdp 39, E (Mathieu) : « c'est celle qui a le plus de voiture/c'est celle qui a de cartes qui/qui/qui gagne des voitures/ »
Tdp 40, E (Richard) : « oui »
Tdp 41, E (Isabelle) : « qui gagne une voiture »

Les anticipants affirment que la règle du jeu consiste à ne plus avoir de cartes pour gagner une voiture. Richard évoque même « un super gagnant » de toutes les parties et le gain de dix voitures au tdp 32. Isabelle revient à la réalité en précisant que « ça/c'était pas dans la règle du jeu/par contre/Richard/ » (tdp 33). La remarque de André (tdp 36) consiste à modifier la règle du jeu « mais si on a moins de cartes/on devrait pas avoir de voiture/ ». Il semble qu'il envisage le gain seulement comme « un plus », c'est-à-dire avec « plus » de cartes (une augmentation du nombre de cartes). Nous notons que les anticipants ne sont pas déroutés par la remarque de André. Ils restent fidèles à la règle du jeu mise en œuvre dans le groupe d'anticipation. La certitude s'est sans doute élaborée à partir des expériences construites lors de la séance d'anticipation.

SYNTHÈSE

En quoi les activités proposées lors des séances d'anticipation ont-elles permis le devancement du temps didactique ?

Nous avons montré que les différents petits jeux proposés (la « bataille » des trains, le jeu du pari) et le milieu-artefact de la balance, lors de ces séances d'anticipation, ont permis aux élèves de devancer le temps didactique par l'élaboration de la compréhension du sens adéquat attribué aux expressions mathématiques. Par ce travail au sein du groupe d'anticipation, l'élève a mis son capital d'adéquation en conformité avec les attentes de l'institution. Il possède alors la capacité de pouvoir jouer au jeu demandé. Nous lions ensemble les notions de devancement didactique et la capacité de jouer au jeu demandé puisque si l'agencement du milieu est pensé par le professeur, ce n'est pas pour permettre à l'élève de savoir avant les autres ni d'éviter les erreurs, c'est essentiellement dans le but de rendre l'élève capable de pouvoir jouer le jeu.

1. LE DEVANCEMENT DU TEMPS DIDACTIQUE : RENDRE L'ÉLÈVE CAPABLE DE JOUER LE JEU

La construction du rapport à l'objet adéquat semble participer au devancement du temps didactique puisque l'élève passe d'un rapport générique à une connaissance spécifique ancrée sur des explorations de « l'objet mathématique », centrées ici autour de la notion de « Différence/Soustraction ». Le sens des expressions mathématiques devient alors dense en savoir puisque l'arrière-plan pourvu des expériences réalisées lors des séances d'anticipation réalisées par les élèves revivifie les explorations. Elles permettent un retour sur l'expérience, notamment dans l'élaboration du savoir en construction par une « mise à distance » de l'expérience vécue effectuée par le langage. L'élève se réapproprie donc l'exploration, la narre et en « extrait » la connaissance pour la partager. L'arrière-plan est ainsi la référence nécessaire à la compréhension des expressions mathématiques partagées et il nourrit la « vie » du savoir en évolution.

Le travail dans le groupe d'anticipation n'est donc pas de la répétition de la séance collective mais plutôt le devancement du temps didactique dont l'enjeu consiste dans l'adéquation du capital didactique de l'élève avec la situation afin de pouvoir jouer au jeu demandé. En somme, l'élève, grâce aux séances d'anticipation, entre dans une « zone » dans laquelle l'apprentissage est rendu possible et où l'erreur est productive de connaissances par le travail sur le contrat.

Étudions maintenant les différents agencements du milieu et des contrats.

2. LE TRAVAIL DU CONTRAT ET DES DIFFÉRENCES DE CONTRAT

Nous avons montré que l'hétérogénéité du groupe d'anticipation permet à l'élève avancé d'être une aide pour le professeur parce qu'il établit des « ponts de compréhension » entre le Savoir et les élèves moins avancés. L'élève avancé effectue une sorte de « traduction » des énoncés du professeur et rend le groupe attentifs aux signes. L'élève moins avancé, quant à lui, apporte publiquement l'obstacle qu'il rencontre dans la sphère privée (ou qu'il a rencontré dans maintes situations) ce qui favorise un retour situé sur d'anciens savoirs. Ils sont à la source des débats réactualisés sur les nouveaux savoirs. De par ces échanges, le savoir visé se construit. C'est donc un groupe de « mixité intellectuelle » pour la compréhension de tous, qui permet le travail du contrat, que nous pouvons mettre rapidement en évidence par le rappel de deux exemples

A partir de l'exemple de Isabelle et de Mathieu, la différence de compréhension de l'instrument, et, à travers elle, la différence de compréhension du contrat didactique entre les deux élèves est vraiment importante, et sans doute décisive pour l'avancée du temps didactique au sein du groupe d'anticipation. Rappelons que Mathieu envisage la balance numérique uniquement pour calculer de très grands nombres tandis que Isabelle pense qu'elle permet également de prouver l'objet le plus lourd. C'est bien parce que les contrats didactiques sont différentiels que le travail du contrat précisément est essentiel. Afin que les élèves « s'entendent », se comprennent et puissent travailler ensemble, il est nécessaire qu'ils élaborent conjointement le même arrière-plan, la même référence dont dépend la situation de l'enseignement-apprentissage. L'article de Perrin-Glorian M-J a permis de comprendre les difficultés propres aux élèves moins avancés. (1993).

Considérons maintenant un autre exemple, celui d'Jean-Louis. Il affirme que l'équipe A est en droit de déposer les deux nombres (les deux masses) du même côté du bras de la balance parce que c'est au tour de l'équipe désignée de jouer. Avec cette proposition, on passe du « nécessaire mathématiquement » (il est obligatoire que la balance penche pour des raisons physiques mathématiques – en fait pour des raisons physiques qu'on peut modéliser mathématiquement), à un « nécessaire normatif » : on a le droit de mettre des masses quand c'est son tour de jouer.

Ici, il nous semble qu'il s'agit d'un exemple typique possible du travail du contrat, que le débat construit par la situation de dialogue entre le grand groupe et le groupe d'anticipation, fait émerger.

3. LE MILIEU-RECHERCHE

Comme nous avons montré, le milieu-recherche peut-être constitué à la fois par le travail du contrat en appui sur le milieu matériel. Pour le module « Différence/Soustraction », il peut s'agir du matériel spécifique de la recherche ACE (les trains-nombres) et/ou de la balance numérique.

3.1 La balance numérique, milieu-artéfact

La balance numérique est un « milieu-artéfact » qui correspond bien à ce que font les élèves ici : élucider le fonctionnement d'un instrument. On pourrait dire aussi « milieu-instrument », qui permet par exemple de découvrir que le mouvement de bascule (déséquilibre/équilibre) est soumis à des « lois » qui permettent de montrer et d'étudier l'égalité dans sa complexité,c'est-à-dire y compris les cas particuliers.

3.2 Le milieu « antagoniste »

Le déséquilibre est du côté du nombre à 3 termes (2 termes > 3 termes) pourtant le nombre inconnu est à écrire avec les deux nombres de l'écriture additive (de deux termes). L'étude de la balance peut alors permettre d'affiner l'idée d'égalité, en mettant à mal la conception selon laquelle une somme de trois masses (une écriture additive de 3 termes) est nécessairement supérieure à une somme de deux masses (une écriture additive de 2 termes). La balance est un milieu qu'on peut caractériser d'une certaine façon de milieu « antagoniste », parce qu'elle réagit en validant les stratégies mathématiquement correctes et en invalidant les stratégies mathématiquement incorrectes.

3.3 Le rôle du zéro

Le milieu-instrument permet aussi l'étude de la situation dans laquelle l'écriture de trois termes est égale à l'écriture de deux termes. La balance montre alors l'équilibre produit sans nécessité du nombre inconnu. La contrainte précise pourtant que l'écriture en deux termes doit s'accompagner de la proposition du nombre inconnu. L'élève est amené à comprendre que l'ajout du zéro ne modifiera aucunement l'équilibre constaté.

4. LES ÉCHANGES ENTRE LES ANTICIPANTS ET LES NON ANTICIPANTS

Les élèves du groupe d'anticipation prennent l'habitude de *rendre explicite* leur pratique mathématique, à la fois dans le groupe d'anticipation (la cellule de germination) et lors de la diffusion dans le grand groupe (cellule de diffusion) ce qui peut constituer en soi un objectif d'enseignement-apprentissage.
De plus, les échanges entre les anticipant et les non anticipant montrent des élèves capables de discuter longuement sur des contraintes mathématiques et de fournir une argumentation à la recherche de la preuve. Ceci nous amène à questionner la place de l'élève dans la construction du savoir dans l'avancée collective. Il semble que les travaux analysés prouvent que l'élève est capable de prendre une place très active dans l'élaboration des connaissances et de la mémoire collective.

SYNTHÈSE GÉNÉRALE

Dans cette synthèse générale, nous cherchons à retracer le cheminement parcouru à l'aide des éléments significatifs de la thèse. Pour cela, nous choisissons de regrouper les notions en trois grands ensembles : l'équilibration didactique, la durée et la posture de professeur-chercheur.
L'ensemble 1 évoque l'équilibration didactique et nous permet de revenir à la fois sur l'incitation productive collective et l'usage de la dialectique expression-réticence dont l'enjeu consiste, comme l'analyse l'a montré, dans l'élaboration d'un arrière-plan commun au professeur et aux élèves dans la classe. La référence se construit ainsi dans la relation contrat-milieu, grâce la sémantisation de l'expérience, au sens, et en particulier au sens mathématique, qui lui est donné.
L'ensemble 2 montre une autre durée, celle du temps des situations où l'élève travaille et étudie dans sa propre durée, synonyme d'une continuité des apprentissages qui évite le hors-jeu. C'est donc un temps de la mémoire didactique.
L'ensemble 3 concerne la spécificité de la posture professeur-chercheur, position que j'ai occupée lors ces quatre années de la recherche.

1. L'ÉQUILIBRATION DIDACTIQUE

L'élève aborde la situation-problème avec un contrat didactique « actuel » c'est-à-dire un système de connaissances antérieures déjà-là. Ce système de connaissances antérieures est constitué des formes contractuelles antérieures en tant que système normatif de l'action, système que l'élève a construit à partir des habitudes de classe et des connaissances acquises dans le milieu. Le nouveau milieu-problème, plus ou moins résistant, rend (partiellement) obsolète le contrat « actuel » (le contrat déjà-là). Le nouveau problème ne fait pas « sens » et notamment pour les élèves moins avancés. Il existe alors une nécessité d'instituer un temps d'enquête systématique sur le contrat. Celui-ci (le contrat) est alors réactualisé par l'action conjointe dans le milieu qui fonde l'arrière-plan commun au professeur et aux élèves en tant que référence. Cette référence densifie les expressions mathématiques et rend le jeu possible. Pour cela, le professeur use de la réticence-expression. Cela consiste à orienter l'élève vers des signes pourvoyeurs de sens afin qu'il joue adéquatement au jeu demandé. L'équilibration didactique consiste pour le professeur à user de la dialectique réticence-expression, dans le contrat-milieu, pour construire conjointement la certitude.

1.1 L'incitation productive collective

Un des gestes professoraux qui permet d'élaborer la référence commune, c'est-à-dire l'arrière-plan nécessaire à la résolution du problème ainsi que le travail du contrat, est l'*incitation productive collective*. De celle-ci dépend la qualité des échanges et des productions écrites dont l'enjeu, répétons-le, est la construction d'un contrat adéquat pour pouvoir jouer et commencer à apprendre. Par l'incitation productive collective, nous entendons le temps spécifique de l'étude des règles définitoires du jeu d'apprentissage en situation, au sein d'une « incitation à produire », qui n'est pas uniquement assumée par le professeur, mais par le collectif classe. En fait, les règles définitoires sont « traduites » conjointement lors des échanges afin de signifier le même arrière-plan pour le professeur et les élèves, et de permettre la compréhension réciproque, qui est très loin d'être « automatique », on l'a vu. Par exemple, lorsque la classe recherche une annonce en trois termes perdante supérieure à un lancer en deux termes, une élève, Nathalie, applique la stratégie du regroupement ou encore « du nombre qui s'occupe de deux nombres ». Elle oublie les contraintes de la situation. Elle écrit dans son Journal du Nombre $1 + 7 + 0 > 8 + 0$, P (perdu). L'annonce produite est perdante, au sens de la symbolique mathématique, puisqu'elle n'est pas vraie (elle est égale alors qu'elle devrait être supérieure) mais elle est aussi invalide puisqu'elle comporte un zéro dans le lancer (impossible à figurer sur le dé) et des nombres supérieurs à une main et à un dé. La référence commune à construire pour jouer adéquatement consiste dans l'élaboration conjointe de la compréhension d'une annonce perdante au jeu des annonces mais gagnante au jeu didactique.

Il ne s'agit donc pas de divulguer le savoir visé mais d'autoriser sa « naissance » par un travail sur les relations milieu-contrat. L'élève n'est pas assuré de gagner mais le temps de l'incitation productive collective lui offre la possibilité de participer dans de « bonnes conditions » afin de ne pas être hors de la situation, hors-jeu. L'élève a alors la capacité de pouvoir apprendre dans et par le contrat. C'est dans la participation de l'élève et sa compréhension de l'arrière-plan - c'est-à-dire le déchiffrement de la référence commune nécessaire à l'enseignement-apprentissage - que le système contrat-milieu fonctionne pour la reconnaissance de signes didactiques.

Comme nous l'avons montré lors du travail sur le Journal du Nombre, ce temps de l'incitation productive collective permet aux élèves de parler les situations mais aussi des ensembles de situations avec par exemple la recherche des critères de validation afin que le nombre de l'annonce en trois termes soit égal au nombre du lancer en deux termes en référant à des milieux différents. Par exemple, un ou deux termes de l'annonce en trois termes peut comprendre le nombre zéro représenté potentiellement par une main fermée. En revanche, pour ce qui est de l'écriture du lancer, le nombre « 0 » ne peut être représenté puisqu'il n'est pas présent sur le dé.

1.2 La dialectique contrat-milieu

L'action est toujours produite en relation à un certain milieu puisque l'élève et le professeur sont confrontés à ce qu'on peut modéliser comme un jeu d'apprentissage. La dialectique contrat-milieu permet au contrat d'agir comme un arrière-plan commun au professeur et aux élèves pour assimiler le milieu dans le jeu d'apprentissage. Le contrat fait sens au problème, c'est-à-dire qu'il est constitué d'un système de significations communes au professeur et aux élèves.

Pour reprendre notre exemple de l'annonce en trois termes égale à un lancer en deux termes, l'élève sait que les écritures additives désignent le même nombre et que les critères d'écriture correspondent à un élément différent du milieu pour l'annonce (les mains) et le lancer (le dé). Cela conditionne le choix possible des nombres. Comme nous le voyons, le contrat peut être vu comme un potentiel d'actions possibles (produire une annonce en trois termes égale à un lancer en deux termes) cristallisé dans le milieu par un potentiel d'actions virtuelles possibles (par exemple, les termes de l'écriture additive pour l'annonce ne peuvent comprendre le nombre 6 puisqu'une main possède 5 doigts ; l'écriture du lancer s'abstient de l'usage du zéro non présent sur le dé).

A d'autres moments, l'élève travaille également en dehors des contraintes du jeu des annonces « Dé et doigts ». L'enjeu est alors l'ajustement, l'accommodation du contrat à d'autres milieux. Par exemple, avec la balance numérique qu'on peut considérer comme un milieu-instrument, qui renvoie des feedbacks « non intentionnels » à l'activité de l'élève, et pour laquelle la recherche de l'équilibre est en fait l'étude de l'égalité.

1.3 La mise en recherche de l'arrière-plan

Dans cette recherche, l'analyse a montré que l'élaboration de l'arrière-plan commun à la classe s'est constitué fortement à partir de deux éléments essentiels : le Journal du nombre et l'Anticipation.

L'anticipation a permis l'élaboration d'une cellule de germination par la constitution d'un petit groupe de travail hétérogène. L'enjeu est de permettre le devancement du temps didactique par la constitution de capital d'adéquation pour les élèves moins avancés. Les anticipants, les élèves du groupe d'anticipation forment ensuite une cellule de diffusion du savoir lors du retour dans le grand groupe.

Les productions dans le Journal du Nombre permettent un débat sur la validité formelle et mathématiques des écritures dans la situation retenue. Avec le Journal du Nombre, la classe réussit à avancer parce qu'elle réussit (dans) le travail du contrat.

1.4 La dialectique de l'expression-réticence

L'expression-réticence peut être conçue comme un méta système stratégique grâce auquel le professeur recherche essentiellement la diffusion des règles définitoires lors de l'incitation productive collective en usant à la fois de l'expression et de la réticence pour le développement de règles stratégiques chez les élèves. Ceci dans le but que l'élève puisse jouer adéquatement au jeu demandé, la connaissance des règles définitoires autorisant la poursuite de l'enquête sur les règles stratégiques. C'est la garantie de l'apprentissage-enseignement pour l'élève. Par exemple, lors de la situation de production d'annonces perdantes pour gagner au jeu didactique, la stratégie du professeur consiste à parler et à renvoyer la question au groupe-classe. Le professeur interroge la classe « Est-ce qu'on prend la proposition ou est-ce qu'on ne la prend pas ? » Les élèves n'ont pas d'information sur ce que pense le professeur (effet de la réticence) mais ils se trouvent dans l'obligation de prendre une décision argumentée (effet de l'expression). En fait, dans cet exemple, la classe doit se prononcer sur l'annonce en trois termes proposée par Richard (4 + 4 + 4) qui doit être supérieure au lancer en deux termes. Le débat porte sur la composition du lancer : le respect de la contrainte des trois termes mais aussi sur le nombre (la somme) désignée par l'annonce. Il existe une discussion autour du nombre représenté par l'écriture additive en trois termes et la question sera tranchée par l'usage de la ligne graduée. Finalement, la recherche de la preuve que l'annonce est supérieure au lancer montrera que la comparaison des termes de l'annonce et du lancer est une autre stratégie possible de résolution. Ce cheminement sera rendu possible à chaque instant par le « mixte » de réticence et d'expression que le professeur pourra faire vivre, par exemple dans l'incitation à l'usage d'un artéfact comme la ligne graduée. Proposer un système sémiotique est un acte d'expression, dans lequel la position topogénétique du professeur est relativement haute, mais le travail adéquat dans ce système sémiotique suppose une réticence dans laquelle le professeur ne livre pas ce qui pourrait ressembler à un « mode d'emploi » de l'artéfact.

1.5 La sémantisation des formes de vie

Les élèves construisent collectivement des jeux de langage en situation pour parler *les* situations et pour parler *des* situations avec des expressions institutionnalisées dans la classe. Ce sont les jeux de langage qui donnent sens aux formes de vie de l'activité didactique comme nous l'avons montré lors des analyses, par exemple avec les expressions « un nombre s'occupe de deux nombres » qui a produit deux expressions dérivées « extraire un nombre » et « combiner un nombre » pour la recherche du calcul ou bien encore « voir un nombre dans un nombre ». Les jeux d'apprentissage ne prennent sens que dans un travail langagier spécifique qui accompagnent les « formes de vie » qu'ils mettent en œuvre.

2. LA DURÉE

Le Journal du Nombre permet d'ancrer l'avancée du temps didactique dans les productions individuelles et collectives des élèves sur le long terme. Ce sont les productions des élèves qui constituent la matière même de l'avancée dans la classe.

2.1 Temps des situations et rythme d'apprentissage

Par le temps des situations, nous entendons la confrontation de l'élève à un système de situations dans lequel il va rencontrer et tester la fonctionnalité des savoirs. Pour cela, les situations sont répétitives et évolutives. Elles permettent le travail sur la modélisation pour laquelle nous pouvons dire qu'elle est attentive à la production conjointe d'un *référence commune,* comme l'analyse l'a montré, tout en réinvestissant les acquis de type algébrique ou de décomposition-composition sur les nombres. Par exemple, les productions de génération 1, 2 et 3 (que nous avons étudiées en particulier dans Le Journal du Nombre d'Jean-Louis) montre une évolution dans la construction du nombre. Au début, chaque décomposition est reliée à un nombre puis plusieurs décompositions sont rattachées au même nombre. Ensuite, différentes décompositions codent différents nombres. Cette « progression » s'établit dans la durée propre de l'élève, la connaissance mathématique portant elle-même sa propre croissance.

Le rythme d'apprentissage dépasse l'antériorité séquentielle et montre l'importance d'un savoir complexe et non fragmenté. Par exemple, lors du module « Différence/Soustraction », l'élève est confronté à des opérations qu'il ne sait momentanément pas résoudre (du type $5 - 8$). L'élève commence par noter « égal à 0 » en disant : « 5 moins 5 c'est 0 et là c'est encore moins que 0 » avant l'évolution de ses connaissances par une catégorisation des opérations soustractives avec la présence du terme le plus grand est en première position.

Toujours dans ce même module, l'élève apprend bien plus que le calcul d'une soustraction puisqu'à partir de trois nombres, il crée quatre opérations et applique la relation de la commutativité lors de l'écrit $4 + 5 = 9$ et $5 + 4 = 9$. Il ne s'agit pas seulement de nombres inversés. L'élève, à partir du matériel des trains-nombres, conçoit le calcul à partir du plus petit des deux nombres ou du plus grand pour la désignation du même nombre. La relation de commutativité consolidée est un appui pour la compréhension de la « Différence/Soustraction » puisque l'élève prouve par le calcul que la différence entre les nombres 9 et 5, c'est 4 ($9 - 5 = 4$) parce qu'il sait que $4 + 5 = 9$ et $5 + 4 = 9$.

2.2 Apprendre dans et par le contrat-milieu

Le travail du contrat permet de faire en sorte, nous l'avons vu, que tous les élèves soient rendus capables de jouer le jeu d'une manière adéquate par la mise en conformité du capital d'adéquation. L'hétérogénéité didactique est gérée par le professeur dans le contrôle des contrats différentiels, comme nous l'avons montré lors de l'analyse de l'incitation productive collective pour laquelle une proposition erronée est l'occasion d'une étude spécifique de la relation contrat-milieu. Elle permet la traduction des énoncés du professeur et des règles définitoires dans l'élaboration d'un « voir-comme » commun.

2.3 Mémoire et continuité de l'apprentissage

L'élève n'apprend pas dans une juxtaposition de situations mais éprouve la continuité dans l'apprentissage-enseignement puisque les connaissances ne sont pas cloisonnées. Il est également permis à l'élève d'effectuer des retours dans le savoir.

Par exemple, l'analyse a montré, lors de la grande écriture du nombre 8 pour laquelle l'élève « accroche » toutes les décompositions égales à 8 qu'il connait par exemple 5 + 3 = 4 + 4 = 1 + 1 + 6 etc, qu'un élève avancé produisait des décompositions additives avec le signe « - », signe non étudié dans la classe à ce temps de la situation. L'élève moins avancé, quant à lui, utilisait les répertoires additifs vécus et mémorisés par la situation du jeu des annonces « Dé et doigts ».

La situation des trains avec le module 0 met en évidence qu'un nombre a plusieurs désignations possibles. Cependant, il s'agit toujours du même nombre. Cette référence commune aide à l'élaboration du nombre puisque l'élève accorde ensuite à l'expression « c'est pareil et c'est pas pareil » le sens mathématique construit conjointement. L'élève garde la mémoire de cette situation, qui va constituer une référence tout au long de son apprentissage. Par exemple, bien plus tard dans la progression, lorsque l'élève compare deux écritures additives différentes en nombres et en termes qui désignent la même somme, il peut alors (se) référer au module 0 avec la comparaison des trains (par exemple, 4B 2R 2V 1J = 5B 4J). Certaines situations constituent ainsi des « noyaux de référence », qui peuvent aider les élèves à comprendre les nouvelles situations et à agir au sein de ces situations.

2.4 La position de l'élève : éviter le hors-jeu

L'élève n'est plus en position d'attente. La cellule de diffusion et le débat qui suit permettent à l'élève de se positionner comme l'acteur principal de ses propres apprentissages lorsqu'il lui est possible d'étudier dans sa durée propre. Les productions de l'élève dans le Journal du Nombre, répétons-le, sont la matière même de l'avancée dans la classe et du partage des connaissances.

Par exemple, pour se limiter à un seul exemple, l'élève moins avancé produit des annonces peu variées avec des petits nombres dans un premier temps. Toutefois, il construit du savoir par la rencontre le zéro (2 + 2 + 0 = 4, 2 + 0 + 2 = 4 et 0 + 2 + 2 = 4). De même, l'artéfact de la balance numérique et le jeu « du trop ou du pas assez » permettent à l'élève d'approfondir la notion d'égalité.

3. LA POSITION DE PROFESSEUR-CHERCHEUR

Le travail relaté ici n'aurait pu être ce qu'il a été si je n'avais pas été à la fois le professeur et le chercheur de la classe.

« Il n'y a rien d'aussi pratique qu'une bonne théorie » (Lewin, 1946)

Nous pensons que la posture de professeur-chercheur est précieuse lorsqu'il s'agit à la fois de construire une théorie de la pratique et une pratique de la théorie, ce qui peut constituer un objectif fondamental pour la recherche. Par exemple, parce que le professeur dispose de la catégorie de contrat, il peut être particulièrement attentif à la difficulté de compréhension des élèves dans la recherche d'un arrière-plan commun. Il s'agit ici de la théorie de la pratique où le professeur appréhende la difficulté réciproque de compréhension. Ensuite, c'est la posture de professeur-chercheur qui me permet la conceptualisation théorique-pratique. Devant l'incompréhension réciproque, la conceptualisation théorique-pratique amène à envisager la difficulté comme une étape ordinaire de l'apprentissage puisqu'elle est régie par d'anciens contrats. La pratique de la théorie invente l'incitation productive collective qui crée la capacité de pouvoir jouer au jeu demandé et cela pour tous.

4. PERSPECTIVES

Dans cette section, nous envisageons les conditions de la poursuite de la recherche. Les élèves de cours préparatoire dont nous avons étudié les pratiques lors de l'année 2013-2014 sont devenus à la rentrée 2014-2015 des élèves de cours élémentaire première année. Afin de poursuivre la compréhension de la construction du nombre par la recherche ACE pour les élèves de CE1, le professeur-chercheur décide d'accompagner ses élèves dans la classe supérieure. C'est donc le « même groupe d'élèves » et le même professeur qui poursuivent la recherche avec l'ajout de cinq nouveaux élèves de cours préparatoire. La classe est maintenant une classe de CP/CE1 de 21 élèves répartie en 15 élèves de CE1 (anciens élèves de CP -ACE) avec 5 élèves de CP + 1 élève de CP -ACE (maintenu).

4.1. La poursuite du travail dans le contrat

Le choix concerne la continuité de l'expérience menée qui devrait permettre de poursuivre l'étude et l'analyse du travail dans le contrat à partir d'une nouvelle mise en œuvre des situations de mathématiques pour une seconde année consécutive réalisée avec les mêmes élèves pour le groupe de CE1.

De même, les habitudes de la classe telles que le groupe d'anticipation et l'usage du Journal du Nombre seront reconduites et pérennisées ainsi que le temps de l'incitation productive collective. Les anticipants vont vivre une seconde année de cette « cellule de germination » dont l'enjeu est la diffusion conjointe dans le grand groupe. L'incitation productive collective a permis de développer des capacités d'argumentation et de recherche dont nous chercherons à montrer les effets dans la continuité sur les connaissances. En fait, l'année de CP a consisté à élaborer conjointement un arrière-plan dans lequel la relation contrat-milieu a permis de parler les mathématiques avec la même référence élaborée entre les élèves et le professeur. L'année de CE1 permettrait de poursuivre l'exploration du nombre, des relations, des propriétés et des catégories mathématiques. Il nous semble également important de continuer le travail spécifique sur la production des énoncés de problèmes.

4.2 Un essai de poursuite tenté l'année 2013-2014 avec les anciens élèves de CP, élèves de CE1

Le professeur-chercheur pense que ce dispositif peut être favorable à la recherche des indices sur les effets du milieu-contrat construit lors de l'année du CP. Un essai réalisé cette année avec les CE1 a montré l'importance du facteur temps pour l'élaboration de la référence commune dans le partage des connaissances. De plus, le professeur et les élèves disposent de la mémoire des situations mises en œuvre lors de l'année 2013-2014 sur laquelle il est possible de continuer la poursuite de la construction des savoirs et sur laquelle les contrats différentiels « bénéfiques » semblent pouvoir continuer d'exister.

4.3 Les élèves moins avancés

Le dispositif pour l'année 2014-2015 permettrait aussi l'étude approfondie de l'évolution des élèves moins avancés, peut-être moins producteurs à l'écrit, comme nous l'avons analysé, mais très présents oralement dans les échanges et parfois, à l'initiative de l'avancée du temps didactique.

Le débat sur les productions est maintenant une institution dans laquelle l'erreur permet l'apprentissage-enseignement. L'erreur est à la source de la discussion collective pour l'avancée de tous les élèves. Nous avons montré que la qualité des échanges oraux influence la qualité des productions. Nous souhaitons analyser cet élément spécifique sur une année supplémentaire avec les mêmes élèves et le même professeur.

4.4 Les enjeux de la poursuite du travail

La production d'énoncés mathématiques pour faire des catégories permettra un travail sur la langue orale et sur le code mais l'enjeu consistera dans la recherche d'une catégorisation des différents problèmes.

Le travail des contraintes dans différents milieux sera poursuivi pour approfondir l'enquête sur les écritures arithmétiques.